Caracterización De Materiales Mediante Ensayos De Ultrasonido

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DIRECTO PARA EL CASO DE MATERIALES HETEROGÉNEOS

El análisis de materiales por métodos ultrasónicos se basa en un principio sencillo de la física:

"el movimiento de cualquier onda es afectado por el medio por el que viaja"

Parámetros mensurables que se asocian con el pasaje de una onda sonora de alta frecuencia por un material:

- *tiempo de tránsito*
- *atenuación*
- *dispersión*
- *contenido de frecuencias*

Pueden, en principio, correlacionarse con las propiedades físicas tales como dureza, módulo elástico, densidad.

Se utilizan para caracterizar un material homogéneo, o bien, obtener valores equivalentes globales de un material heterogéneo

Relación entre la velocidad de propagación de la onda en el medio, *C*, la densidad del medio, ρ , y las constantes elásticas:

$$c^2 = \mathrm{T}_{ij} / \rho$$

Las constantes elásticas de un material son:

Módulo de Young, E: constante de proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación a lo largo de un mismo eje, en un material sometido a tensión o compresión.

Constante de Poisson, n: cociente entre el esfuerzo radial y el axial

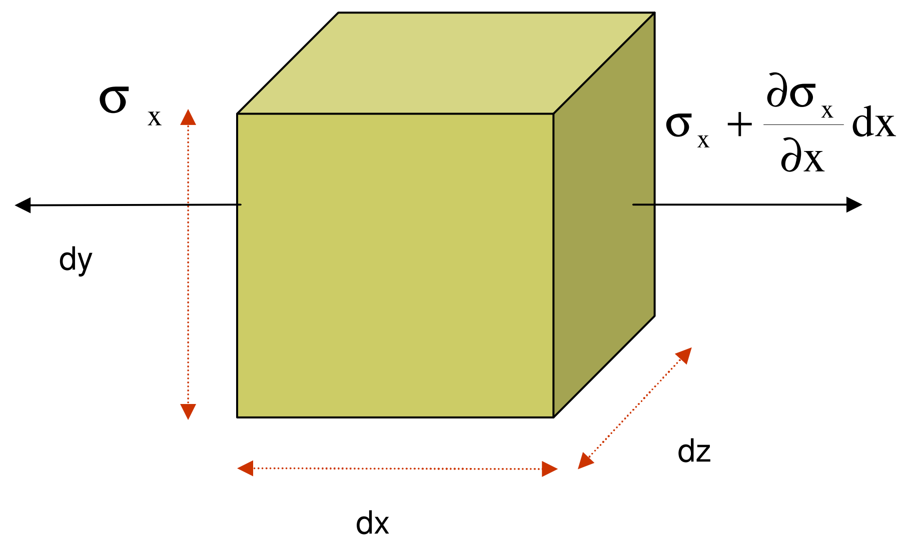
Módulo de Bulk, K: medida de la incompresibilidad de un cuerpo sujeto a presión hidrostática.

Constantes de Lame, λ y M: constantes derivadas del módulo de Young y la constante de Poisson.

Esquema de medición: onda transmitida

Formulación matemática para la propagación de señales de ultrasonido en un sólido

El pasaje de una onda a lo largo de un sólido provoca en el mismo un movimiento de partículas. Se considera un sólido **elástico isotrópico** sometido a tensiones en una dirección (σ_x), lo que provoca desplazamientos en dicha dirección (υ_x).



Se relacionan las diferencias de tensión con los desplazamientos a través de la segunda ley de Newton

$$F_x = m.a_x$$

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydx - \sigma_x dydx = \rho dxdydz \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

Formulación matemática para la propagación de señales de ultrasonido en un sólido

Ecuación de movimiento en un medio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial_x} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

La **ecuación constitutiva** en un medio sólido es:

$$\sigma_x = \rho c^2 \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

De las dos ecuaciones anteriores se llega a la **ecuación de onda**, que describe la dinámica de la transmisión de una onda a lo largo de la dirección **x** y para cualquier tiempo **t**.

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

Formulación matemática para la propagación de señales de ultrasonido en un sólido

Puede generarse una onda que sea longitudinal o perpendicular, con respecto al desplazamiento

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{L}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

ecuación de onda longitudinal

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{G}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

ecuación de onda de corte

Donde, G: módulo de corte
L módulo longitudinal
$L = \lambda + 2G$

Formulación matemática para la propagación de señales de ultrasonido en un sólido

La **solución** que se propone a la ecuación de onda debe ser una función general tal que pueda representar diversas formas de onda. La función mas apropiada es una exponencial, por lo tanto el desplazamiento será:

$$u_x(x,t) = A.e^{j(kx-wt)} + B.e^{j(-kx-wt)}$$

- el primer término corresponde a una onda propagándose en el sentido positivo de las *x* y el segundo término es una onda que se propaga en sentido contrario;
- A y B son las amplitudes correspondientes a las ondas incidente y reflejada;
- $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ es el número de onda
- ω es la frecuencia angular de la onda

Las expresiones para la velocidad y la tensión son, respectivamente:

$$v_x(x) = \frac{\partial u_x}{\partial t} = -jw.u_x = -jw.A.e^{j(kx-wt)} - jw.B.e^{j(-kx-wt)}$$

$$\sigma_x(x) = jw\rho cA.e^{j(kx-wt)} - jw\rho cB.e^{j(-kx-wt)}$$

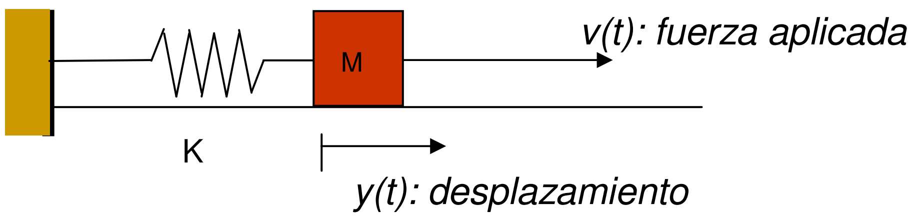
Transmisión

$$u_x(x,t) = A.e^{j(kx-\omega t)} = Ae^{jk(x-ct)}$$

Otra solución de la misma ecuación de onda, es:

$$u_x(x,t) = C\cos(kx-\omega t)$$

Puede relacionarse esta ley de movimiento con la del siguiente modelo mecánico equivalente:

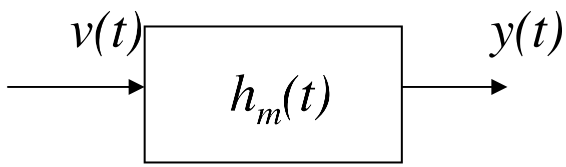


$$para \;\; v(t)=0, \quad y(t)=Y\cos(\omega_0 t), \qquad \omega_0=\sqrt{K/M}$$

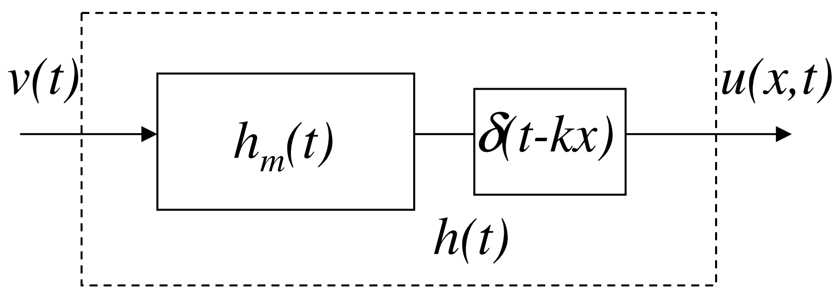
La diferencia entre las soluciones *y(t)* y $u_x(x,t)$ radica en una diferencia de fase *(-kx)*

Solución para medio infinito

El sistema equivalente, es un sistema lineal e invariante, y por lo tanto la respuesta del mismo para cualquier entrada puede expresarse mediante la integral de convolución entre la respuesta al impulso y dicha entrada:

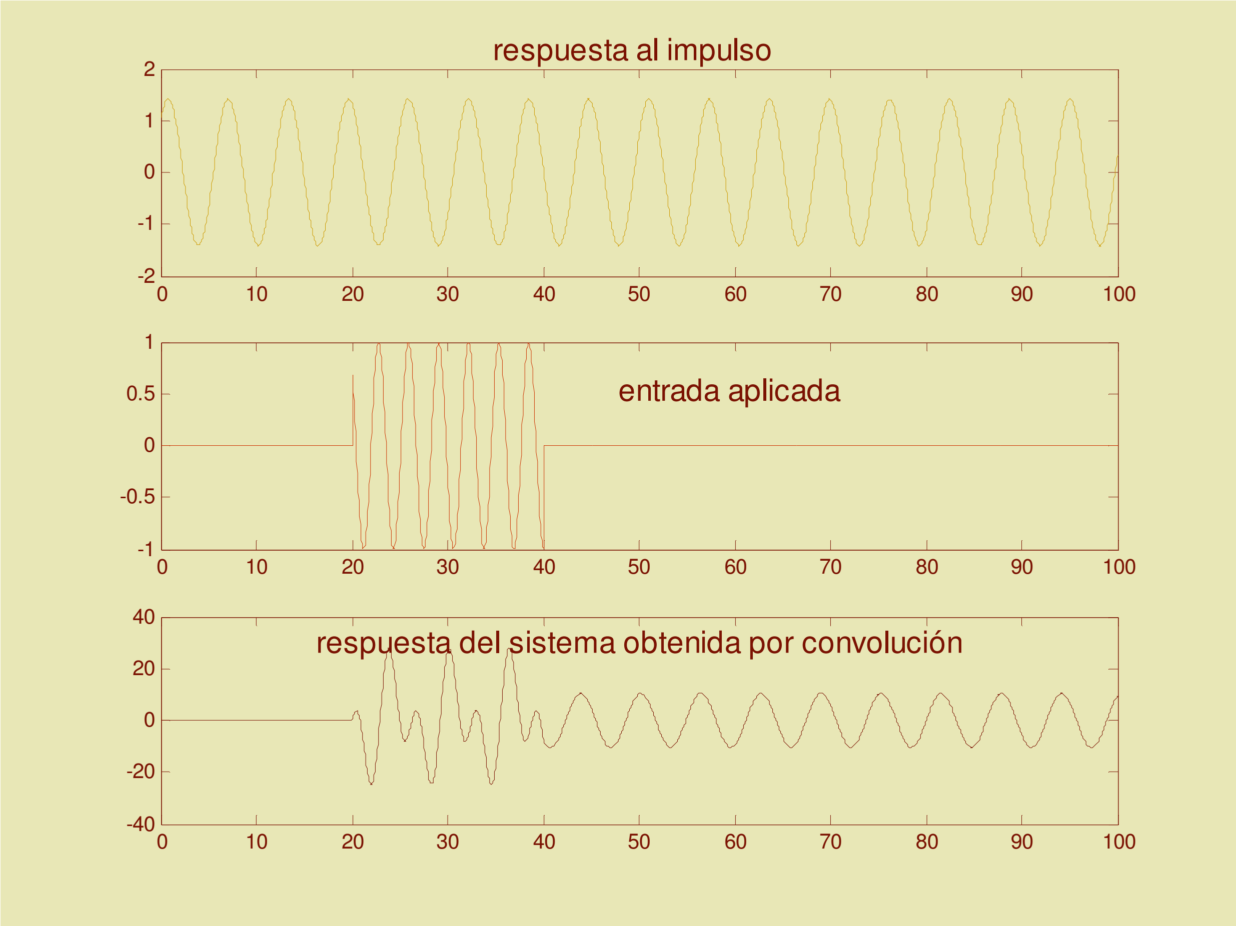


$$y(t) = \int_0^t h_m(t-\tau).v(\tau)d\tau$$



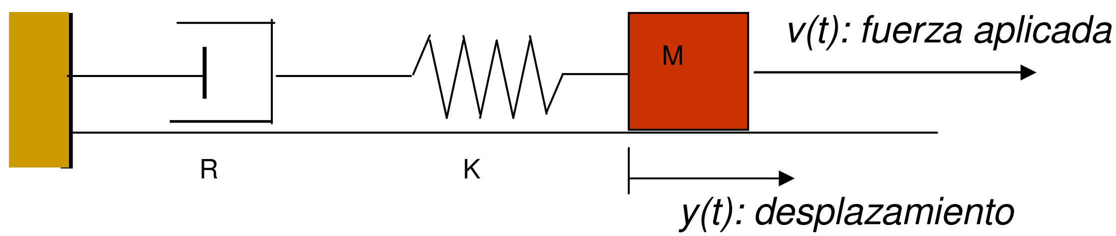
$$u(x,t) = \int_0^t h(t-\tau).v(\tau)d\tau$$

Simulación del modelo
Problema Directo



Comportamiento del sistema para valores M=1, K=1, y R=0. Señal aplicada: una frecuencia única durante un lapso corto de tiempo.

Caso heterogéneo más simple: material bi-capa

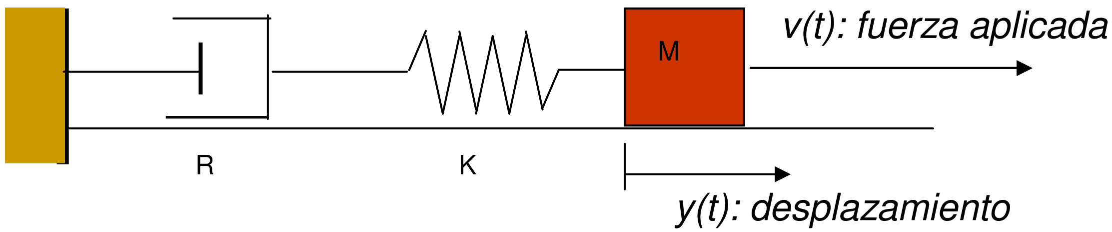


$$u_x(x,t) = A.e^{j(kx-\omega t)}e^{-\alpha x}$$

Las cantidades c y α se combinan en una constante de propagación compleja, $k^* = \omega/c - j\alpha$

Elegimos el coseno o la exponencial ???????

Modelo físico analógico aplicable al caso con atenuación



$$u_x(x,t) = A.e^{j(kx-\omega t)}e^{-\alpha x}$$

Las cantidades c y α se combinan en una constante de propagación compleja, $k^* = \omega/c - j\alpha$

Elegimos el coseno o la exponencial ???????

Presentación del problema inverso

- La identificación de las propiedades del material se realiza encontrando la respuesta al impulso, *h(t)*, a partir del conocimiento de la **entrada aplicada** y la **respuesta medida.**
- La estimación de *h(t)* puede hacerse en el dominio **temporal** o en el **frecuencial**. La convolución, en el dominio frecuencial, queda expresada como:

$$Y(w) = H(w).V(w)$$

- Los **valores** de *y(t)* son **medidos**, tienen **error**, y entonces el proceso de inversión puede producir una amplificación muy seria de los errores en el caso de que el **problema** sea **mal condicionado**.
- El problema debe regularizarse para encontrar una estimación estable de la solución del problema. En el trabajo se utiliza la técnica de regularización de Tikhonov.

Convolución y regularización del problema para encontrar soluciones estables.

Se realizarán estimaciones trabajando en el dominio temporal.
Dada la entrada de un sistema lineal e invariante, *v(t)*, y medida su respuesta, $y_m(t)$, identificar el sistema estimando su respuesta al impulso, sabiendo que:

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau).v(\tau)d\tau$$

.

Si ambas señales son causales, podrá también escribirse que

$$y(t) = \int_0^t v(t-\tau).h(\tau)d\tau$$

la que en forma discreta puede expresarse matricialmente

$$Y = V\ h$$

Si *V* es mal condicionada, y la medición tiene errores, el modelo disponible es

$$Ym = V\ h$$

Convolución y regularización del problema para encontrar soluciones estables.

Se supone que existe un ruido aditivo a la medición ideal, es decir:

$$Ym = Y + \varepsilon$$

Bajo el mal condicionamiento supuesto, la solución

$$h_{est} = V^{-1}\, Ym$$

dará como resultado una estimación de la respuesta al impulso muy diferente a la real del sistema.

El método de Tikhonov propone realizar la estimación a partir de la expresión:

$$h_{Tik} = (V^T V + \gamma I)^{-1}\, V^T Ym$$

la que para el caso particular de la convolución puede también calcularse en el dominio frecuencial como:

$$h_{Tik} = \Im^{-1}\left[\Im(Ym)/(\Im(v) + \gamma v)\right]$$

El parámetro γ es el parámetro de regularización que se determina mediante la aplicación de técnicas como la GCV.