

Escola Sudamericana En Identificación De Propriedades Físicas

Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina

10-12 de octubre de 2006

**Monitoramento em Tempo Real de Propriedades
Termofísicas e Fluidodinâmicas de Escoamentos
Multifásicos Industriais**

Paulo Selegim Júnior

NETeF/EESC/USP

selegim@sc.usp.br

NETef

Núcleo de Engenharia Térmica e Fluidos
EESC - USP



www.netef.eesc.sc.usp.br

Controle de qualidade em processos contínuos

Motivação:

Especificações de produção:

$$\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}$$

$$\mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max}$$

...

$$k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$$

propriedades físicas, químicas
ópticas, elétricas, térmicas, etc.

Controle de qualidade:

off-line: amostragem seguida de ensaios em laboratório

on-line: medição direta em processo ("em fluxo")

Medições off-line

Vantagens:

- ✓ valores obtidos extremamente precisos
- ✓ conformidade com as normas de produção
- ✓ arquivo de "testemunhas" (valor jurídico)

Desvantagens:

- ✓ amostragem e manipulação laboriosas
- ✓ resultados demorados com perda de produção
- ✓ altos custos operacionais (equipamentos e pessoal)

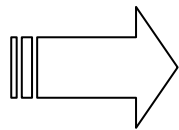
Medições on-line

Vantagens:

- ✓ não são feitas amostras e não há manipulação
- ✓ resultados obtidos instantaneamente (tempo real)
- ✓ baixos custos operacionais (automação)

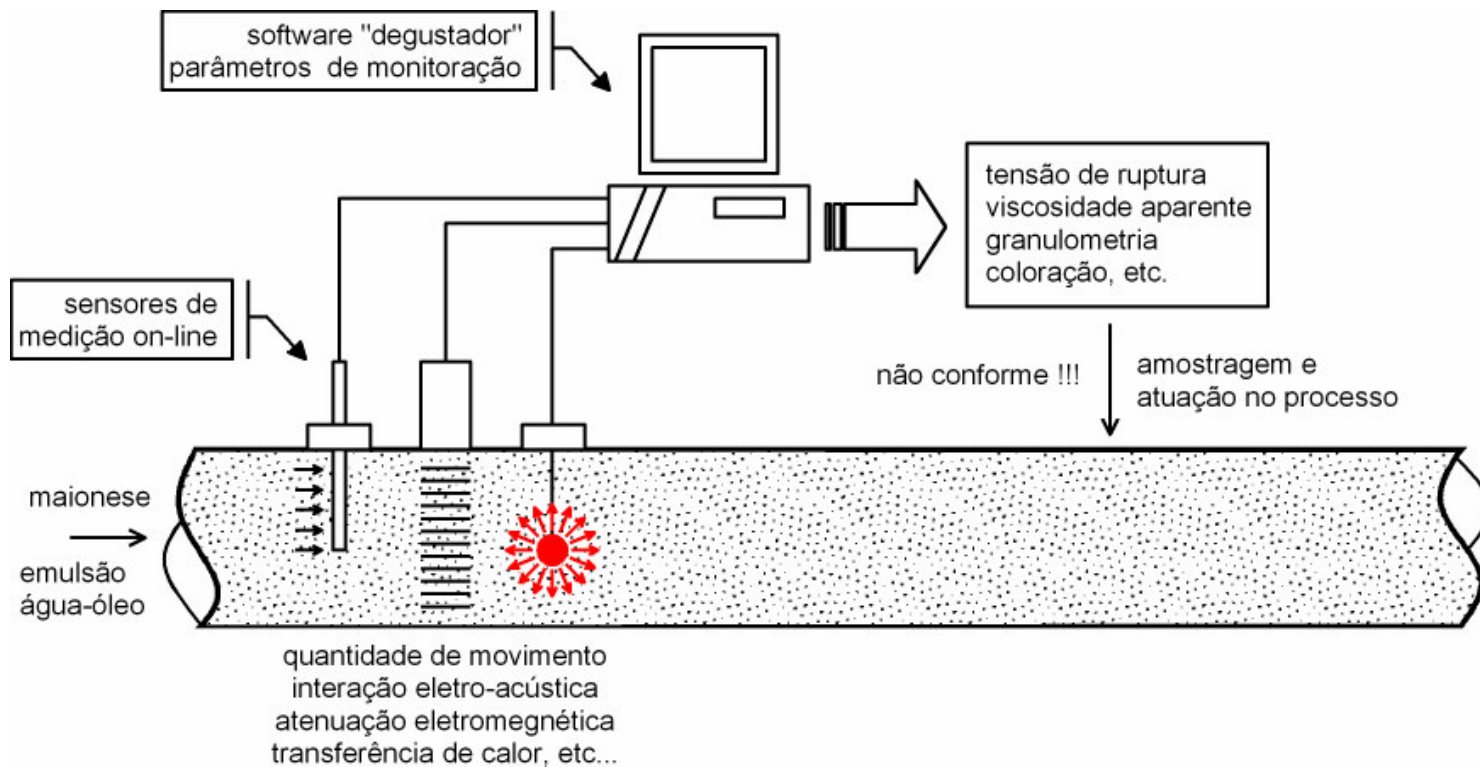
Desvantagens:

- ✓ medidas indiretas das grandezas analisadas
- ✓ não há "testemunhas"
- ✓ não conformidade com as normas de produção...



Estratégia de monitoramento da qualidade e de "disparo" de procedimentos de controle a partir de testes off-line normatizados

Implementação da estratégia on-line



➡ Como relacionar a interação com os campos de sensoriamento às propriedades termofísicas e fluidodinâmicas a serem monitoradas ???

Trabalhos em desenvolvimento no NETeF

- 1) Sonda com processamento neural para a medida da fração de vazio e densidade de área interfacial em escoamento a bolhas
- 2) Algoritmos genéticos paralelos para visualização tomográfica por impedância elétrica de escoamentos bifásicos
- 3) Solução do problema inverso acoplado condução-convecção - aplicação da TSVD na regularização do funcional de erro

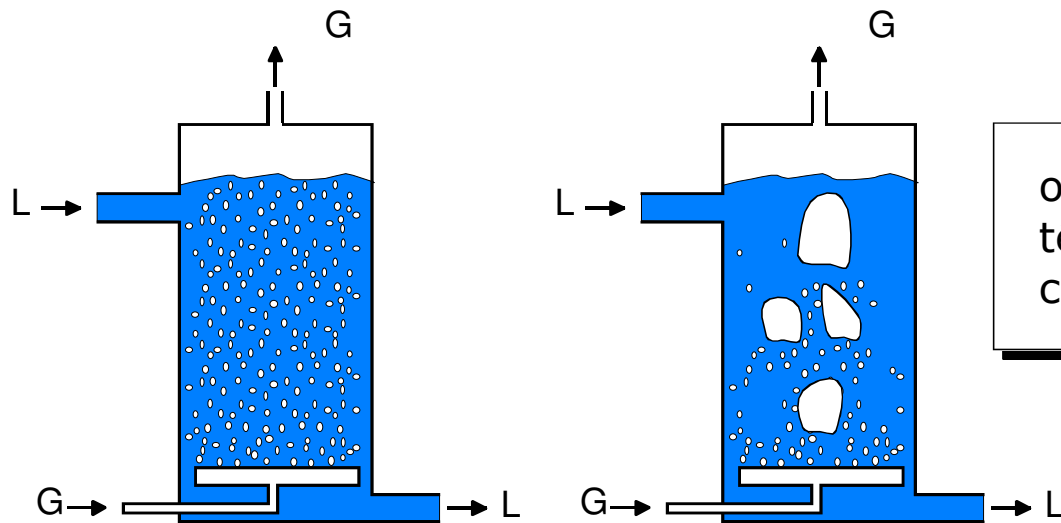
Sonda com Processamento Neural para a Medida
da Fração de Vazio e Densidade de Área
Interfacial em Escoamento a Bolhas

Érica R. Filletti

filletti@sc.usp.br

Aplicações industriais envolvendo escoamento a bolhas

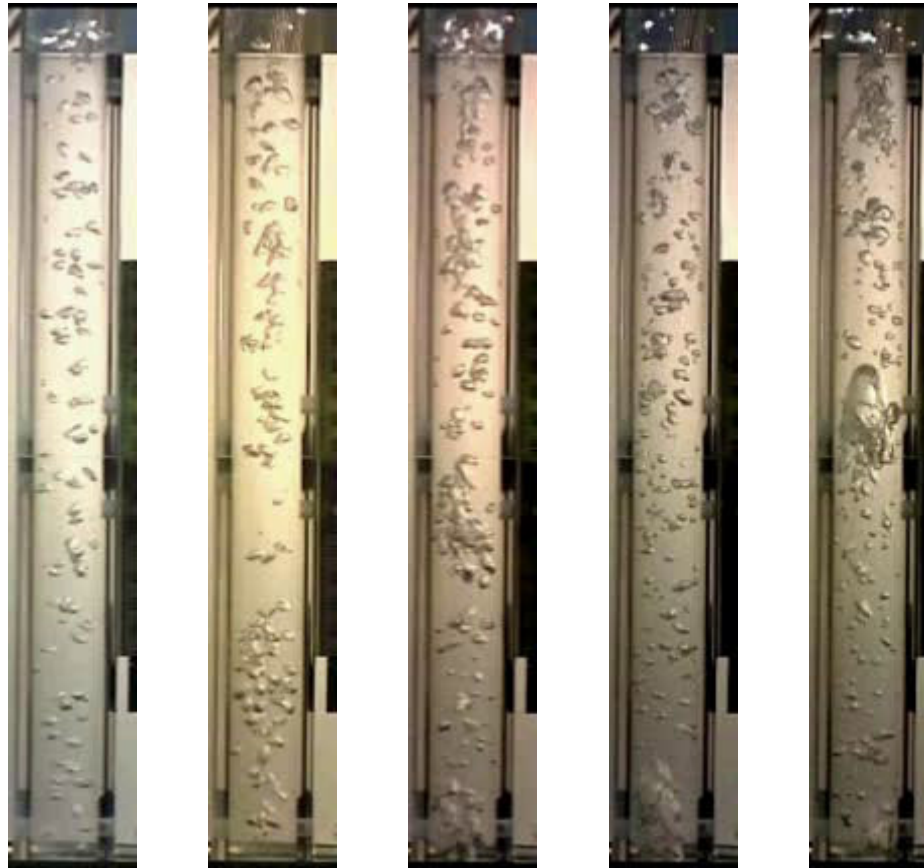
Coluna de bolhas para reações químicas, dissolução de substâncias, transferência de calor, etc.



os regimes de escoamento têm forte influência no funcionamento destes sistemas

exemplo...

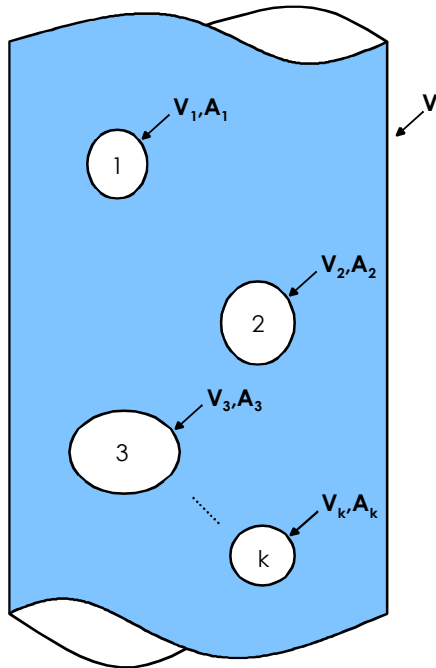
Aplicações industriais envolvendo escoamento a bolhas



Taxa de transferência de calor é ~ 175 vezes menor

Fração de vazio = 0.3

Fração de vazio e densidade de área interfacial



$$\Gamma(t) = \frac{1}{V} \sum_k A_k(t)$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{V} \sum_k V_k(t)$$

Princípio de Ishii (1987)

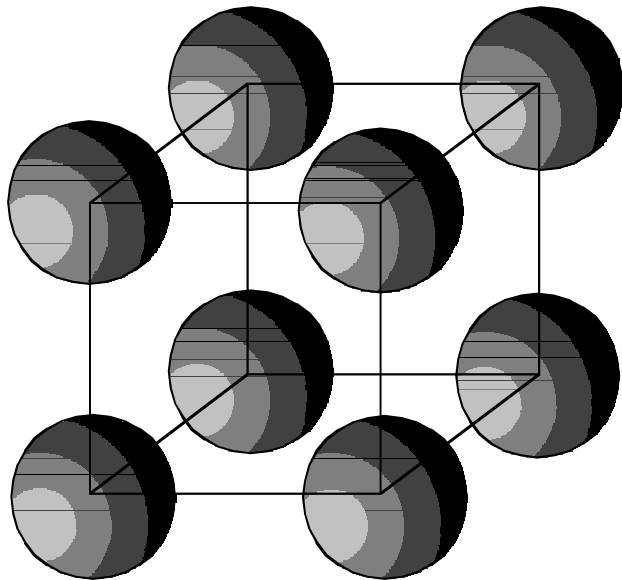
Calor, quantidade
de movimento,
massa, etc.

transf. interface $\approx \Gamma(t) \times$ variação de potencial

Temperatura,
velocidade,
concentração, etc.

Transição bolhas / intermitente

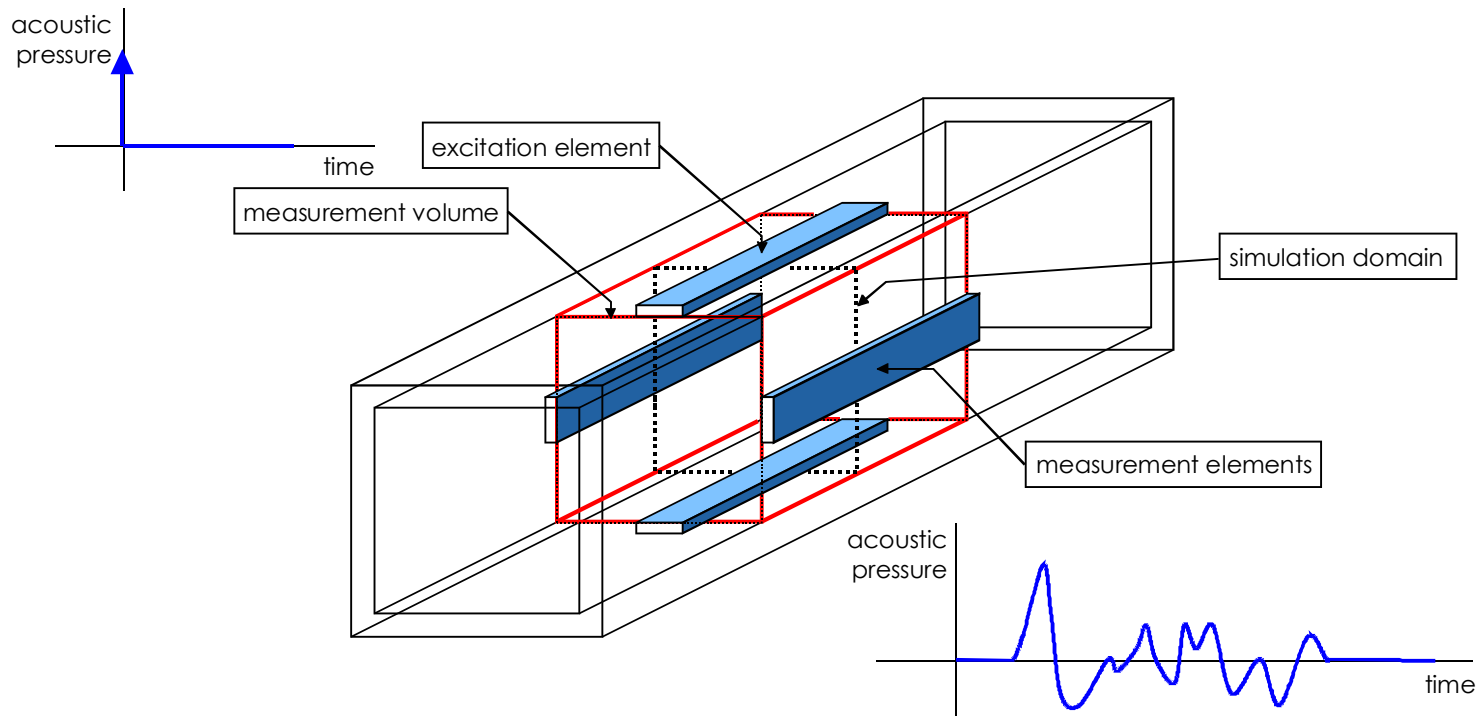
$\Gamma(t) \Leftrightarrow$ regime de escoamento $\Leftrightarrow \alpha(t)$



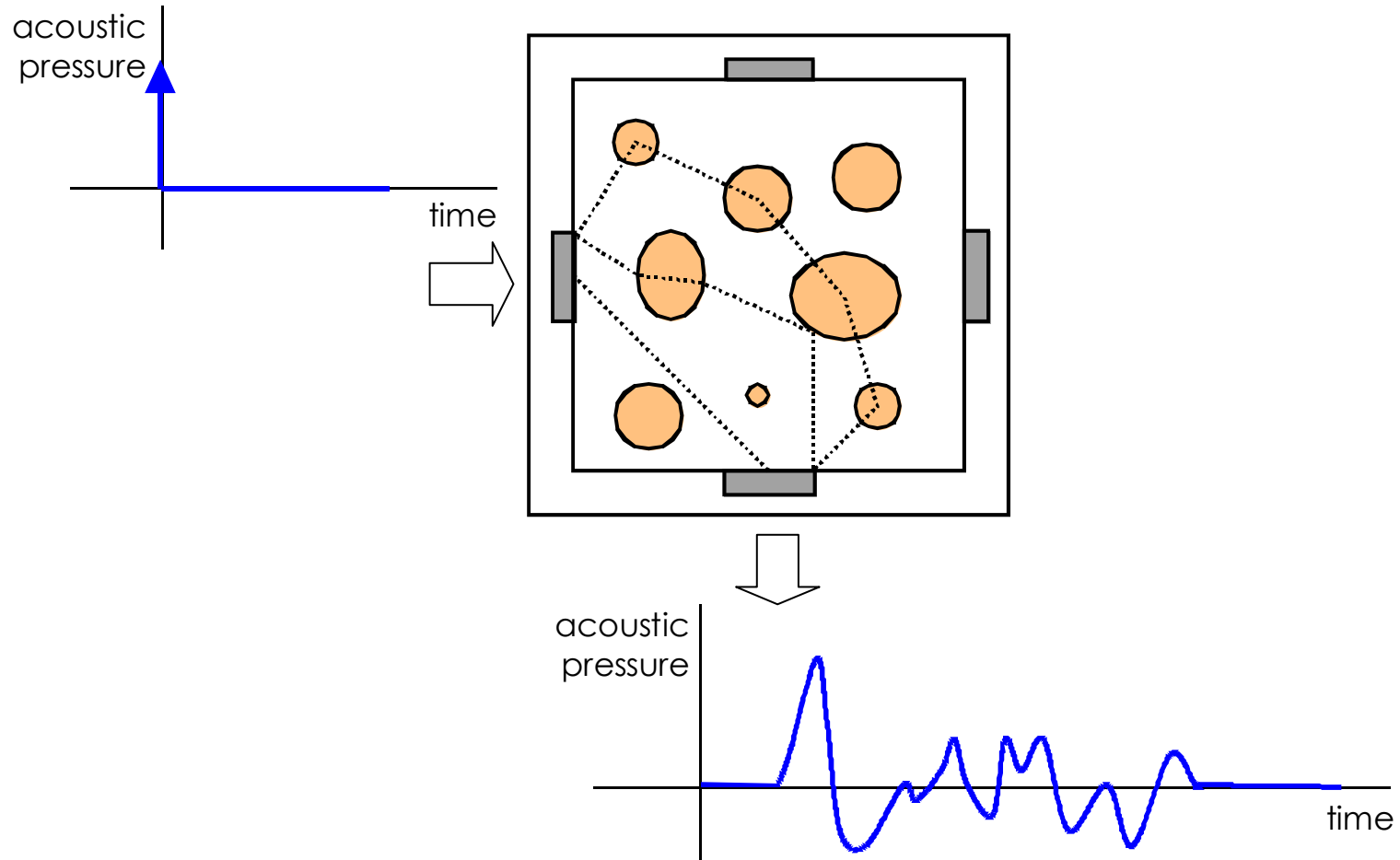
$\alpha(t) < 0.3 \Rightarrow$ bolhas

$\alpha(t) > 0.3 \Rightarrow$ pistonado

Princípio de sensoriamento

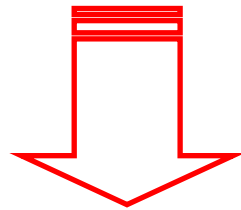


Princípio de sensoriamento



Princípio de sensoriamento

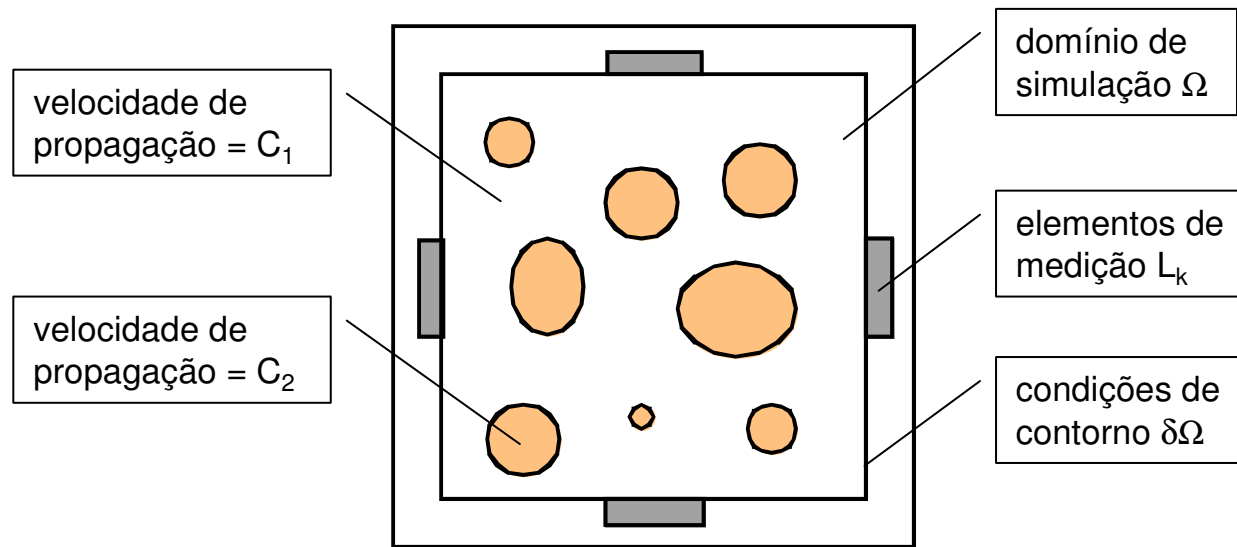
É possível determinar a fração de vazio e a densidade de área interfacial a partir dos sinais de resposta ?????



Tomografia acústica / problema inverso !!!

Formulação do problema direto

Região de sensoriamento



Equação de transdução (pressão acústica)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(t, \vec{x}) - c(\vec{x})^2 \nabla^2 p(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{for } (t, \vec{x}) \in \mathfrak{R}_+ \times \Omega$$

Formulação do problema direto

Excitação

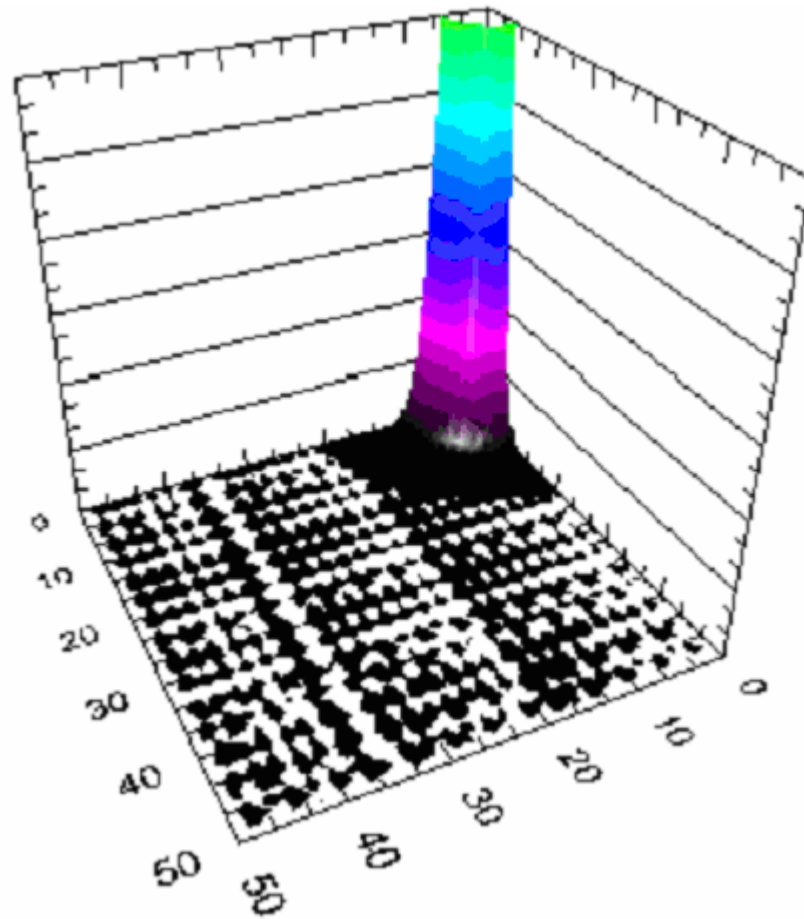
$$p(0, \vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \vec{x} \in L_{\text{exc}} \\ 0 & \text{if } \vec{x} \in \Omega - L_{\text{exc}} \end{cases}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} p(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{for } (t, \vec{x}) \in \mathfrak{R}_+^* \times \partial\Omega$$

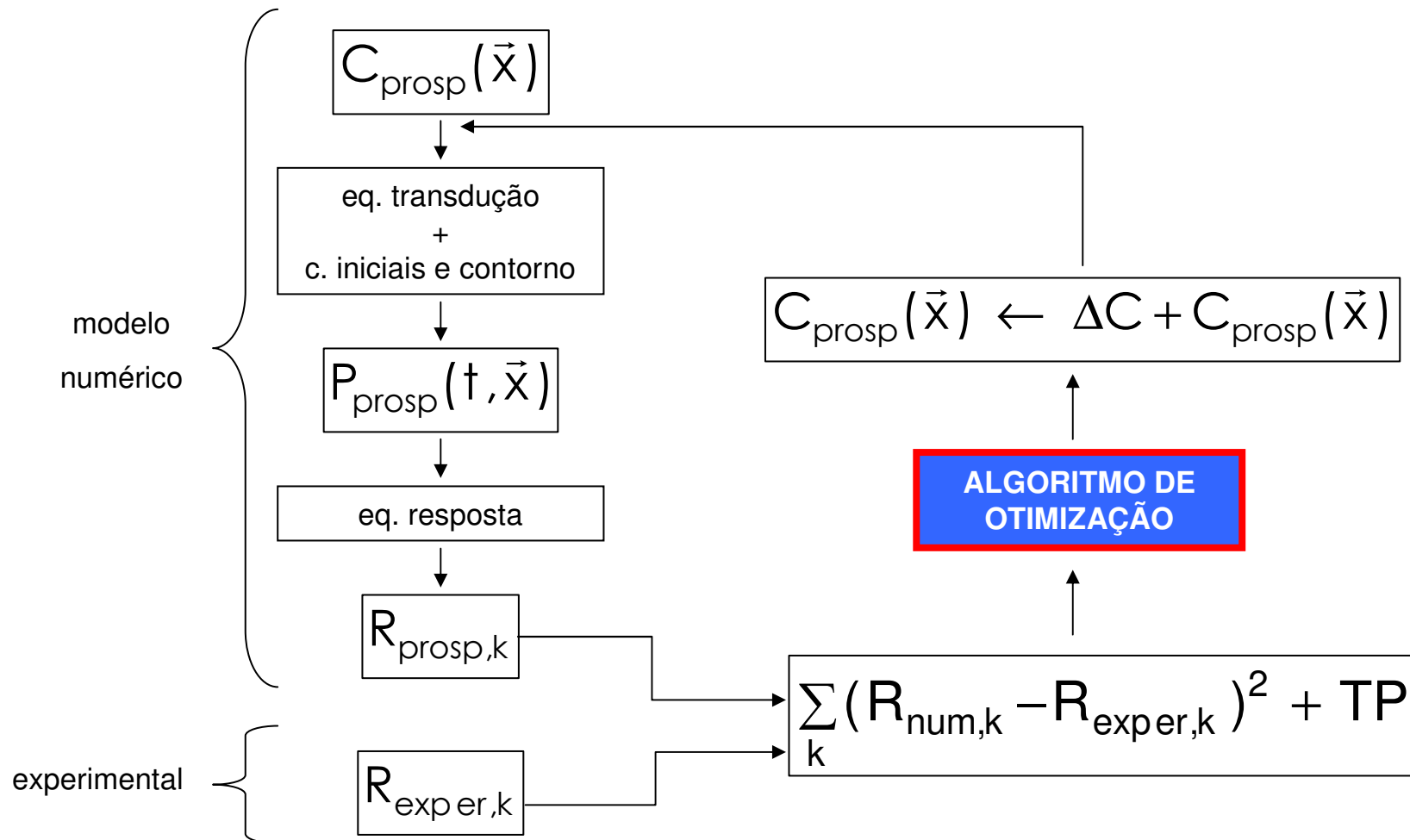
Resposta

$$R_k(t) = \frac{1}{L_k} \oint_{s \in L_k} p(t, \vec{x}) ds \quad \text{for } L_k \subset \partial\Omega$$

Exemplo de simulação do problema direto

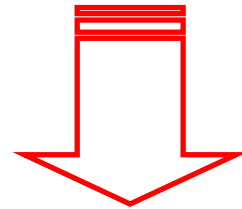


Formulação do problema inverso - funcional de erro



Algoritmos de otimização

A superfície de otimização possui características patológicas ...

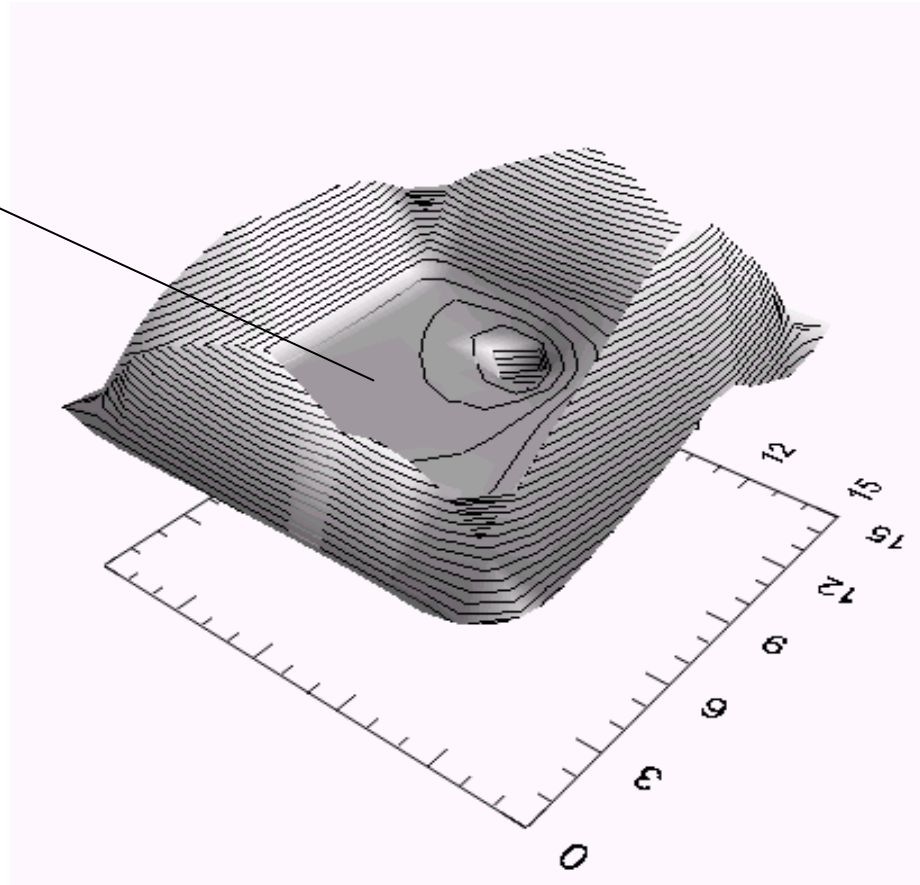


O algoritmo de otimização deve ser definido em função destas patologias !!!

Patologias da superfície de otimização

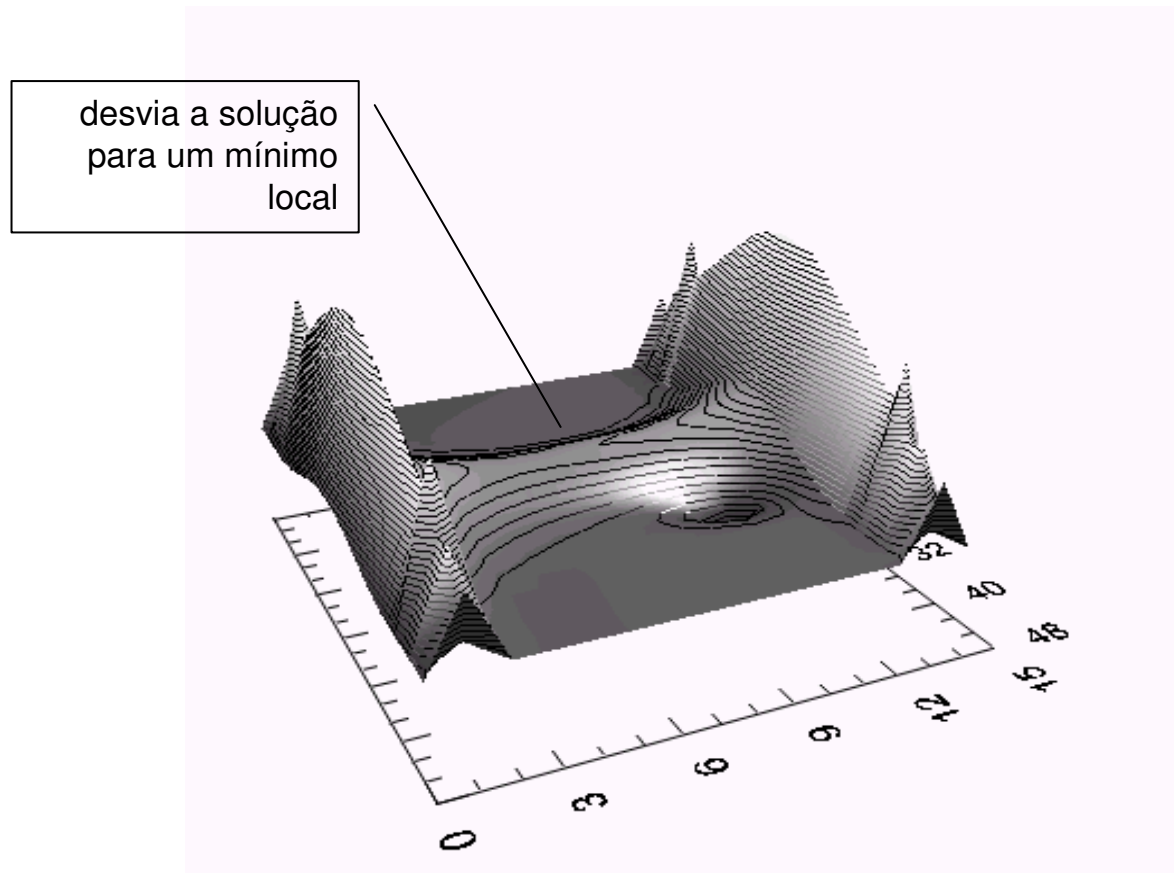
Platô envolvendo o mínimo global

derivadas locais
são inferiores à
resolução numérica



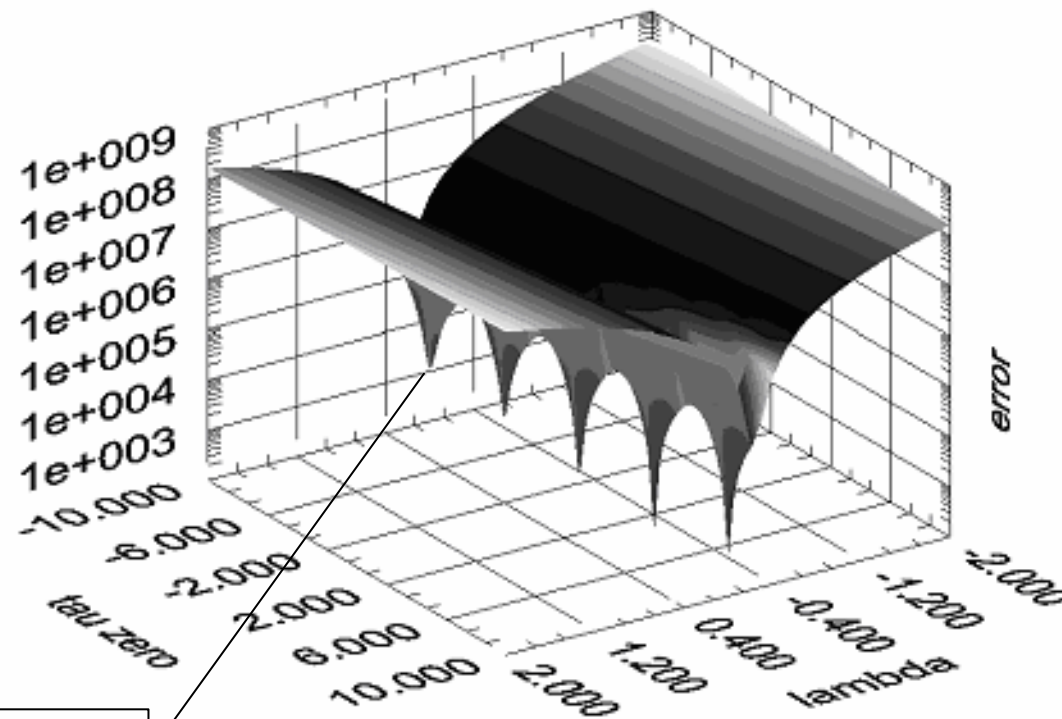
Patologias da superfície de otimização

Pontos de sela



Patologias da superfície de otimização

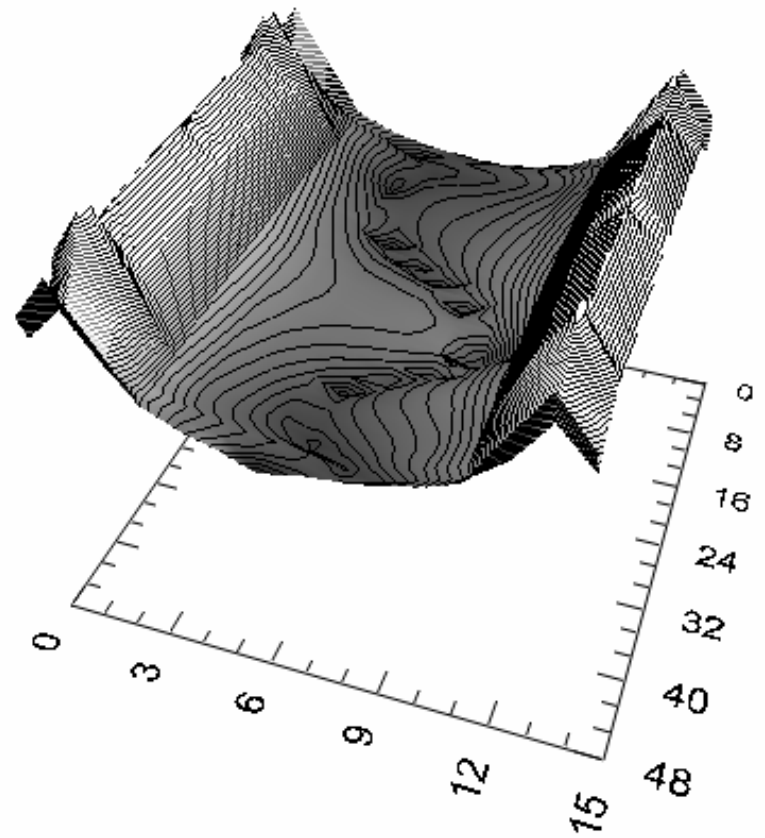
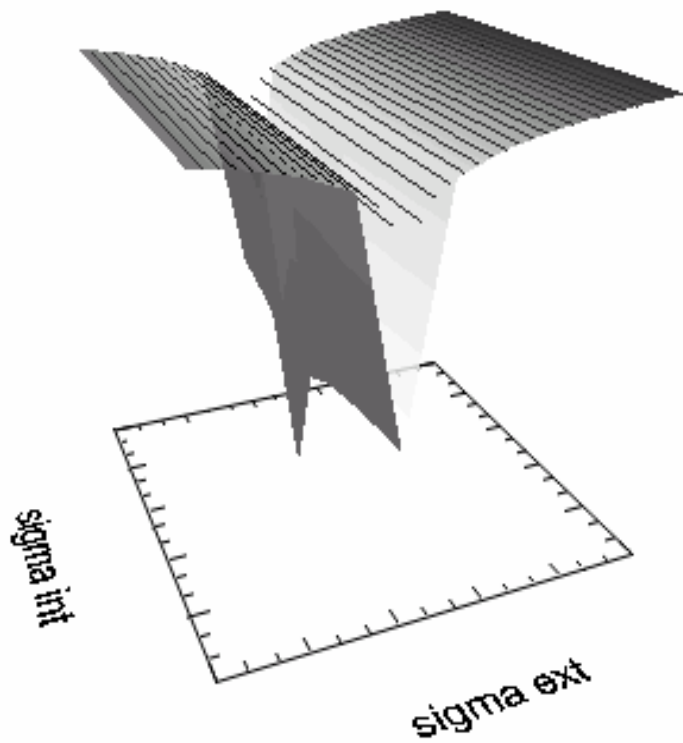
Múltiplos mínimos locais



aprisiona a solução
impedindo a convergência
para o mínimo global

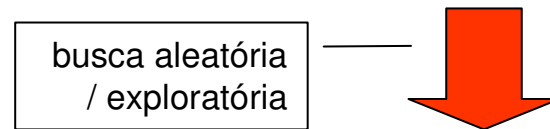
Patologias da superfície de otimização

Combinadas...

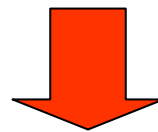


Conclusões...

métodos baseados na inclinação local
muito provavelmente falharão



algoritmos genéticos, simulated annealing, etc.



tempos computacionais são proibitivos !!!

Possibilidades...

1. Regularização do funcional de erro

uso das
inclinações
locais volta a ser
possível

2. Paralelização do algoritmo de otimização

3. Treinamento de uma rede neural



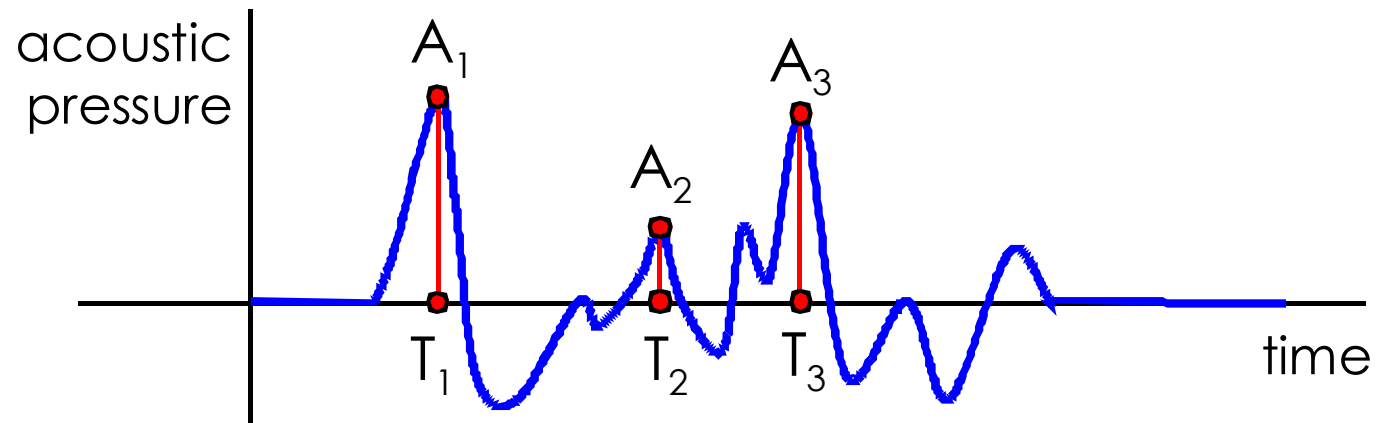
PROBLEMA DE CALIBRAÇÃO...



4. Regularização + paralelização...

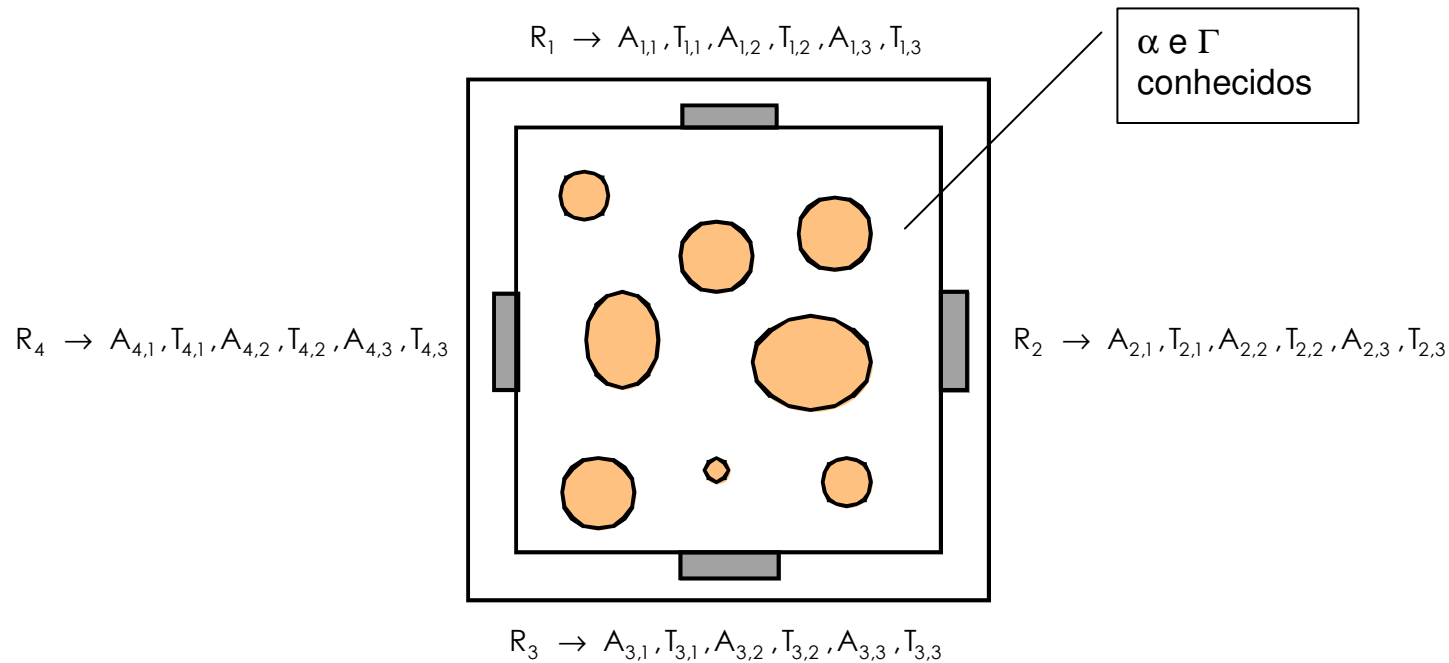
Treinamento de uma rede neural para Γ e α

Características do sinal de resposta à excitação

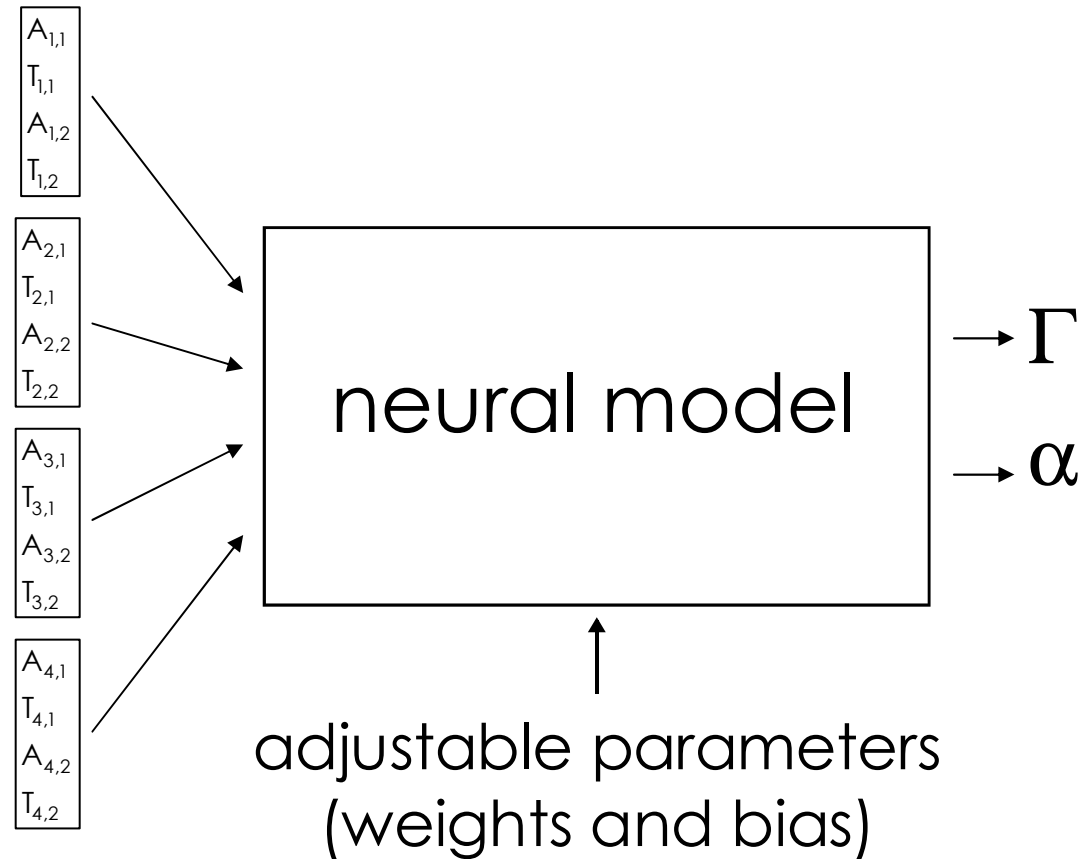


Treinamento de uma rede neural para Γ e α

Características do sinal de resposta à excitação

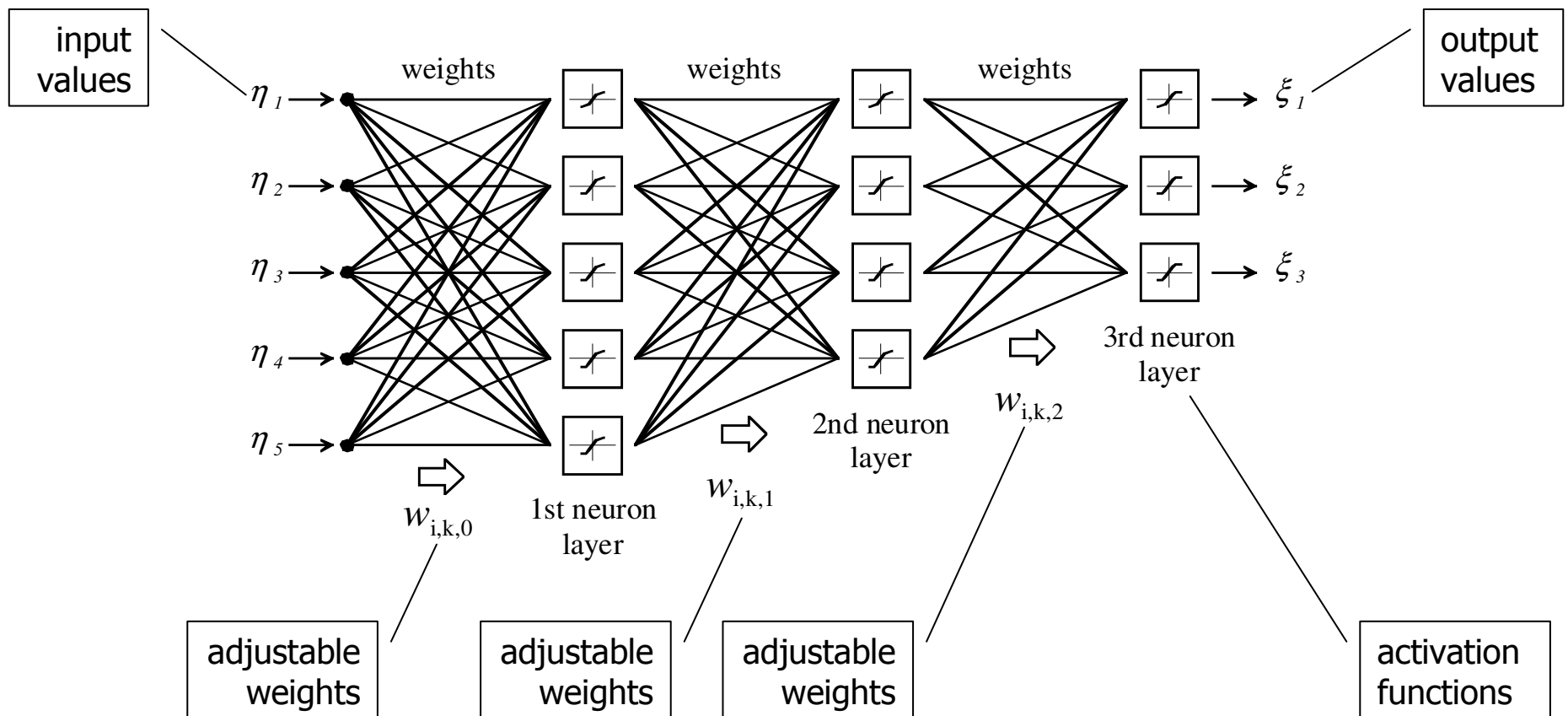


Modelo neural (coneccionista) para Γ e α



Estrutura interna de processamento de uma RN

Modelo feedforward



Estrutura interna de processamento de uma RN

$$\xi_i = F_{i,3} \left(b_{i,3} + \sum_{k=1}^3 w_{i,k,2} F_{k,2} \left(b_{k,2} + \sum_{m=1}^4 w_{k,m,1} F_{m,1} \left(b_{m,1} + \sum_{n=1}^5 w_{m,n,0} \eta_n \right) \right) \right)$$

training data set
(desired outputs)

$(\bar{\eta}_1, \bar{\psi}_1), (\bar{\eta}_2, \bar{\psi}_2), (\bar{\eta}_3, \bar{\psi}_3), \dots, (\bar{\eta}_N, \bar{\psi}_N)$

error functional

$$\text{error} = \sum_{k=1}^n \left\| \xi_k - \bar{\psi}_k \right\|$$



optimal $w_{i,j,k}$ and $b_{i,j}$

training (optimization)
procedure such as the
back-propagation method
or a genetic algorithm

Arquitetura da rede utilizada

- Redes neurais implementadas no *Neural Networks Toolbox* do MATLAB 6.0 em um computador AMD Athlon (TM) XP 2600+ com 2,0 GHz e 1,5 GB de RAM.
- Redes *feed-forward* com o algoritmo de retropropagação do erro.
- Arquitetura da rede para a geometria quadrada:
 - * 24 entradas;
 - * duas camadas intermediárias com 16 e 12 neurônios, respectivamente;
 - * camada de saída com 2 neurônios.
- Arquitetura da rede para a geometria circular:
 - * 24 entradas;
 - * 15 neurônios na primeira camada intermediária e 11 na segunda;
 - * 2 neurônios na camada de saída.

Arquitetura da rede utilizada

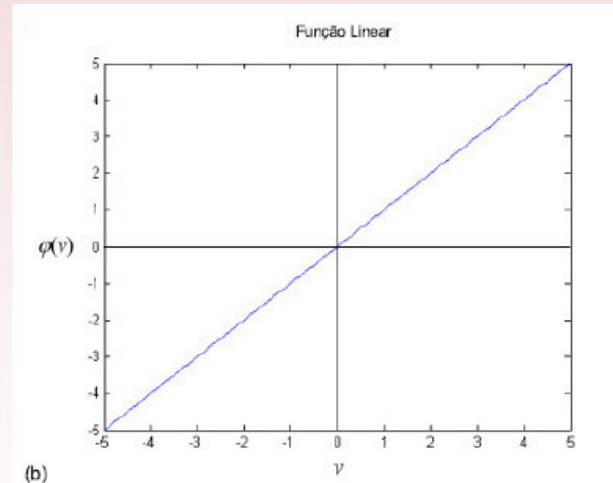
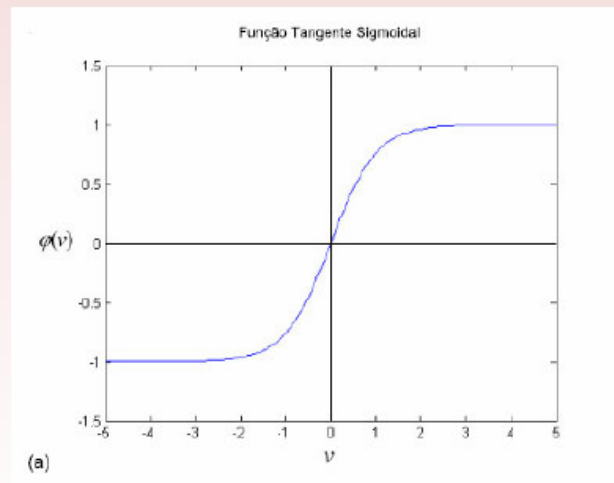
- Funções de ativação:

- * tangente sigmoidal nas camadas intermediárias, dada por

$$\varphi(v) = \frac{2}{(1 + \exp(-2v))} - 1$$

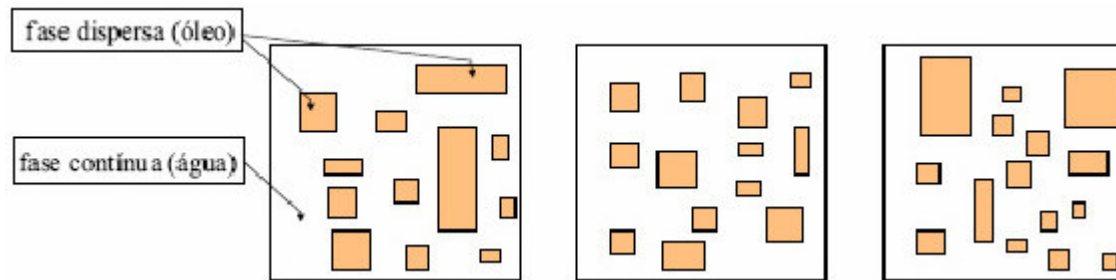
- * função linear na camada de saída, expressa por

$$\varphi(v) = v$$



Base de dados

Inclusões geradas aleatoriamente



4000 exemplos no conjunto de treinamento

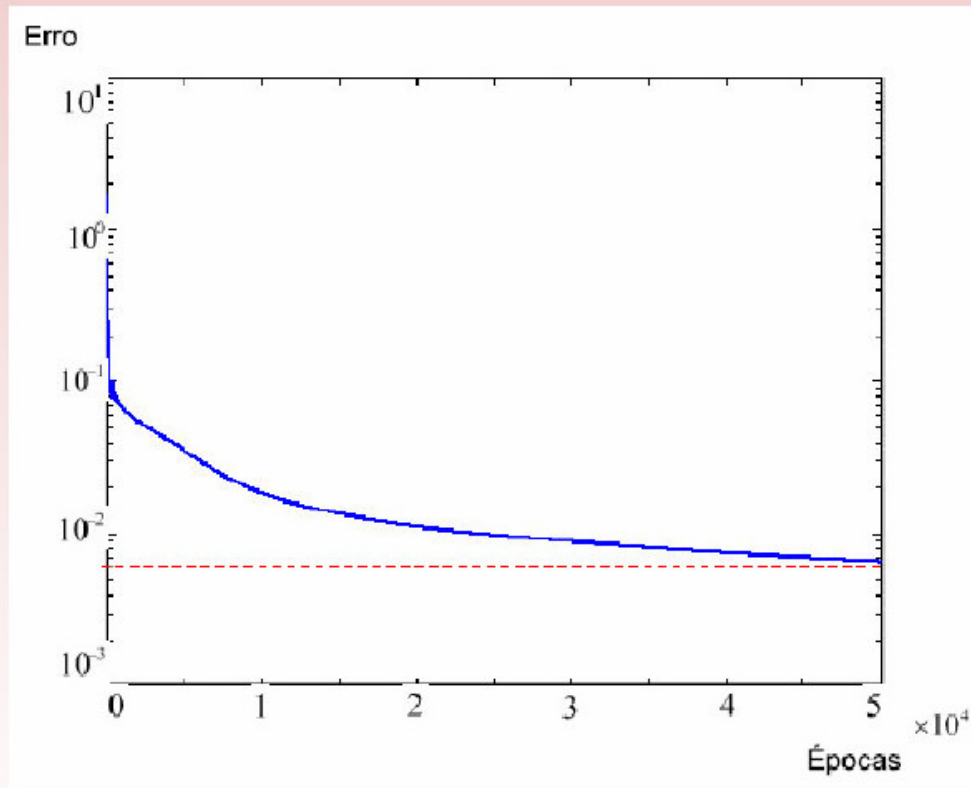
$$\text{entrada} = A_k + T_k$$

$$\text{saídas} = \Gamma + \alpha$$

1000 exemplos no conjunto de validação

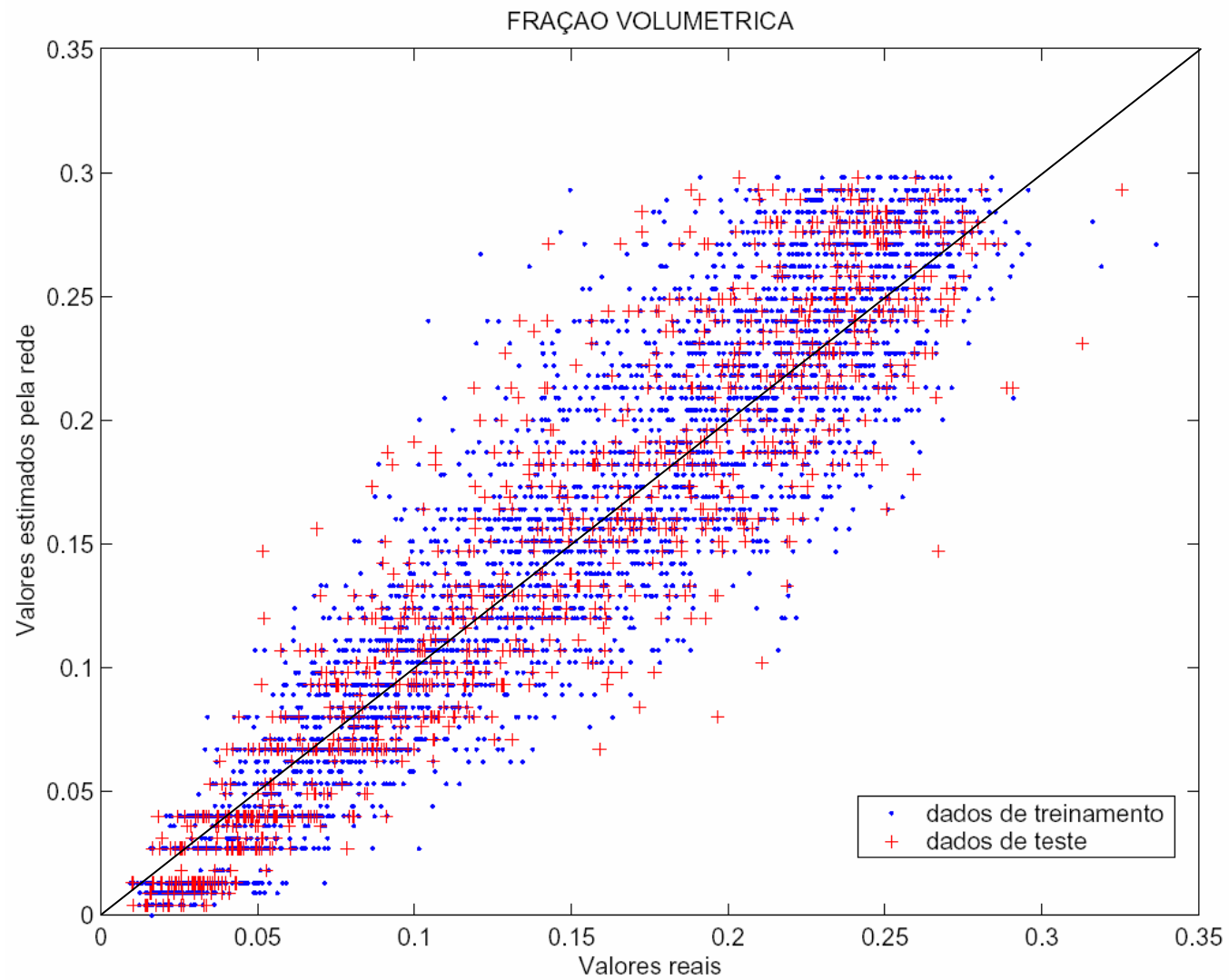
Treinamento (backpropagation)

- Gráfico do erro da rede neural

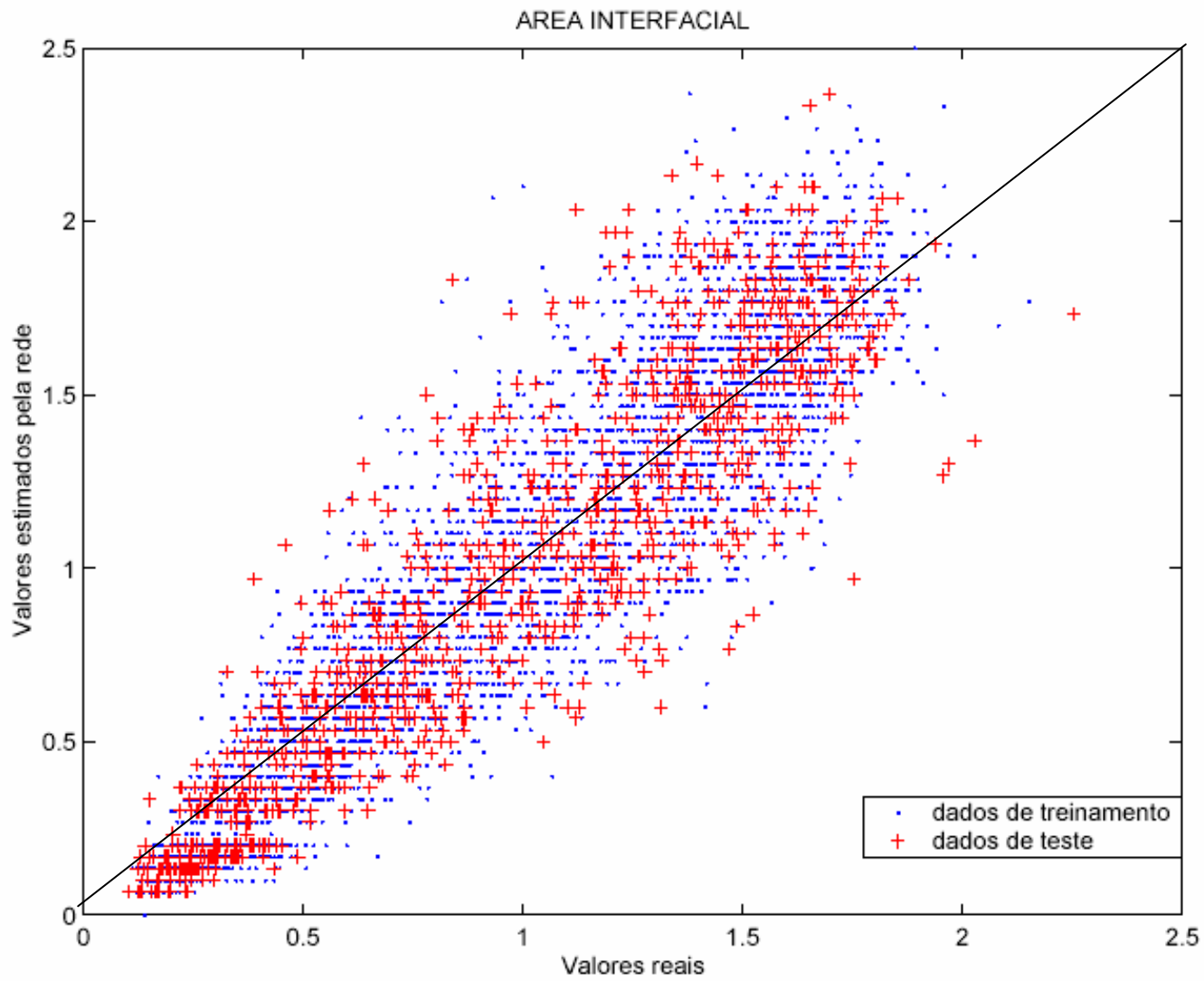


- Taxa de aprendizado = 0,1
- Tempo de treinamento = 15 minutos
- 50000 épocas realizadas durante o treinamento.

Desempenho



Desempenho



Conclusões e perspectivas

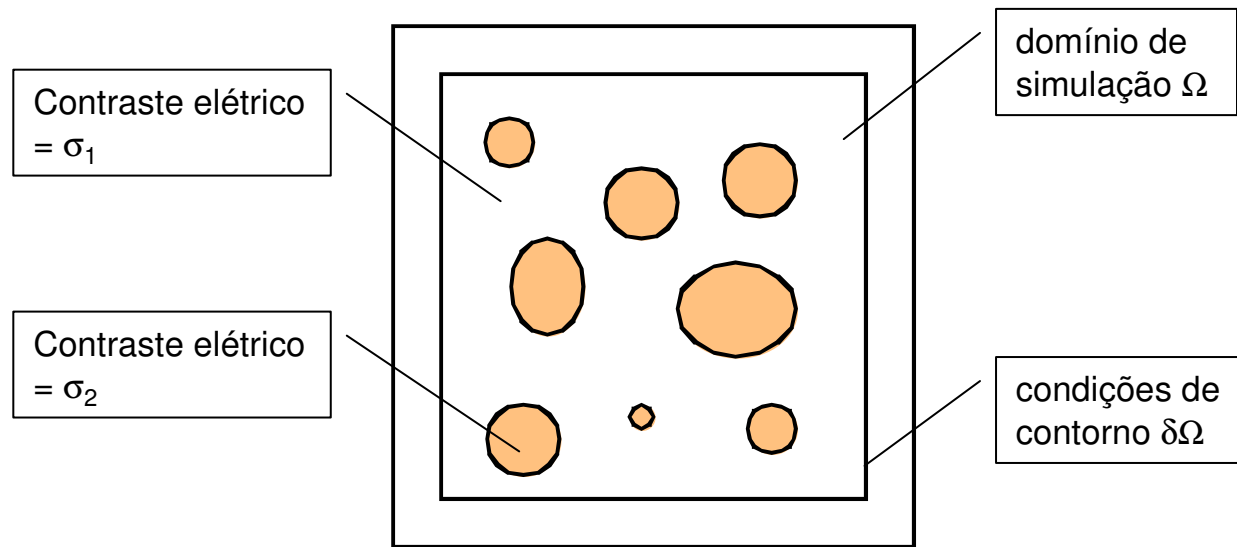
1. O treinamento da rede é um problema de otimização cuja superfície de erro também possui patologias (platô)
2. O backpropagation usa derivadas locais !!!
3. A arquitetura da rede influi no treinamento
 - número de camadas
 - número de neurônios em cada camada
 - função de ativação dos neurônios
4. O treinamento pode ser feito com auxílio de um algoritmo genético

**Algoritmos genéticos paralelos para visualização
tomográfica por impedância elétrica de
escoamentos bifásicos**

Grazieli L. C. Carosio
grazieli@sc.usp.br

Formulação do problema direto

Região de sensoriamento



Equação de transdução (potencial elétrico)

$$\vec{\nabla} \sigma \cdot \vec{\nabla} \phi + \sigma \nabla^2 \phi = 0 \quad \text{em } \Omega$$

Tomografia por impedância elétrica

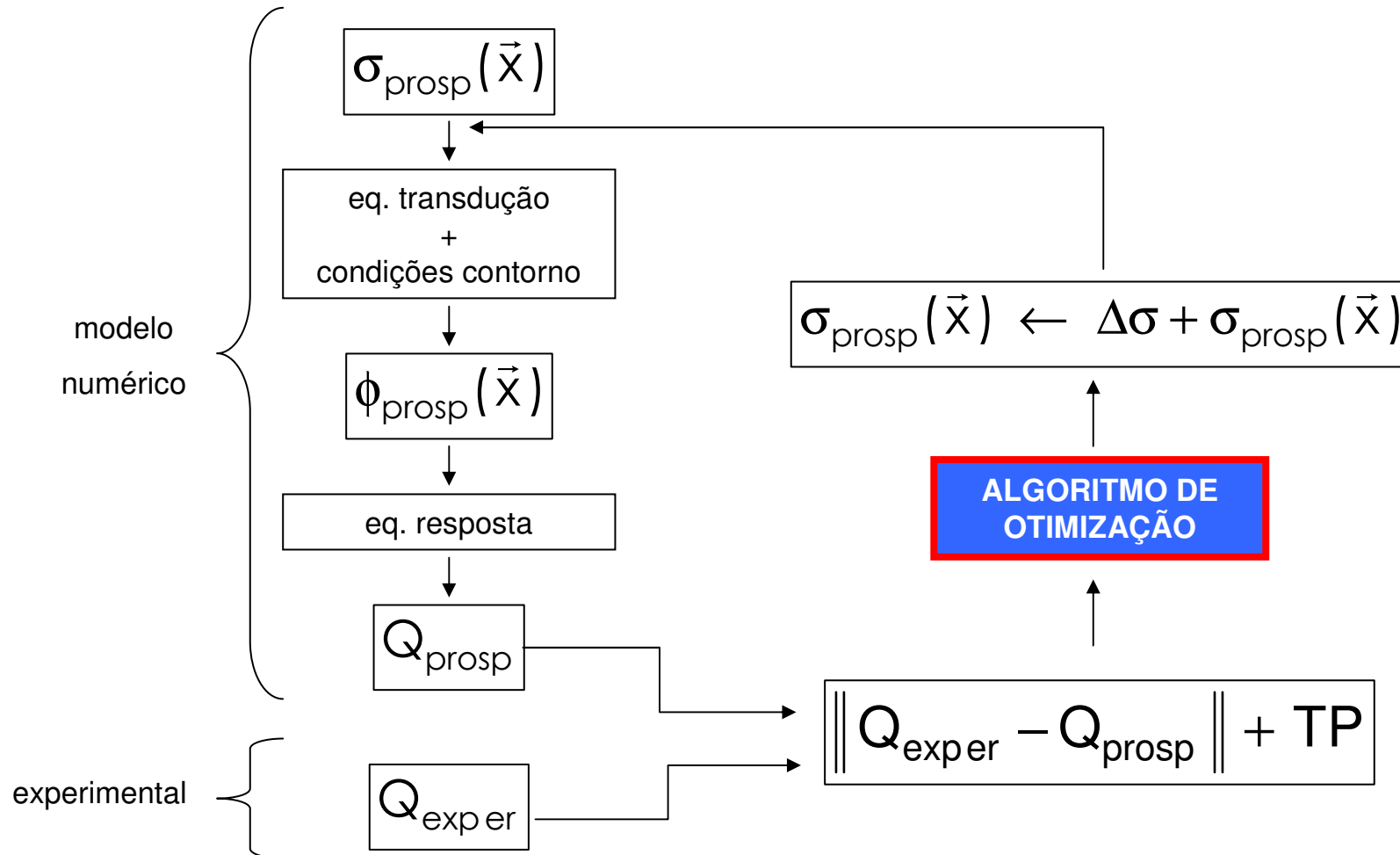
Excitação (Dirichlet)

$$\phi(\xi, \eta) = V(\xi, \eta) \quad \text{para } (\xi, \eta) \in \partial\Omega$$

Resposta (Neumann)

$$-\sigma \vec{\nabla} \phi \Big|_{\xi, \eta} \cdot \vec{n} = Q(\xi, \eta) \quad \text{para } (\xi, \eta) \in \partial\Omega$$

Formulação do problema inverso - funcional de erro



Genetic Algorithm (GA)

1. Heurística de busca aleatória / exploratória
2. Não é necessário cálculo das derivadas locais
3. Testa conjuntos de soluções candidatas (gerações)
4. Candidatos competem para gerar descendentes (nova geração) com base em sua aptidão
5. Sobrevivem e se reproduzem os mais aptos (menor valor da função de erro)

Otimização do funcional de erro por GA

Geração = conjunto de soluções candidatas

$$\vec{\sigma}_k = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \dots, \sigma_N)_k$$

Valores do contraste nos nós de discretização do problema

Aptidão = valor da função de erro

$$\vec{\sigma}_k \Rightarrow e_k = \left\| Q_{\text{exper}} - Q_{\text{prosp},k}(\vec{\sigma}_k) \right\| + TP(\vec{\sigma}_k)$$

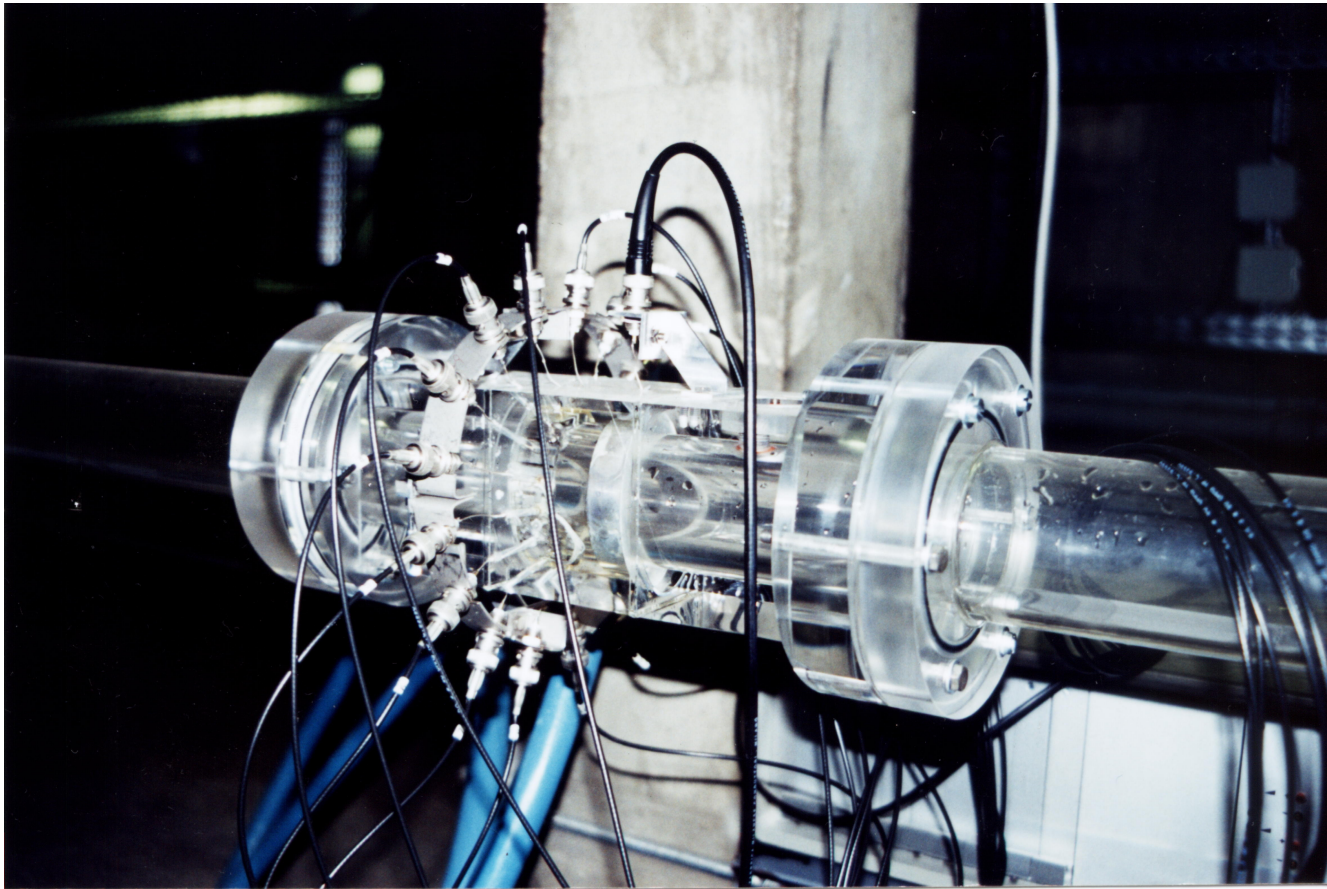
TP = Termos de Penalização

$$TP(\vec{\sigma}_k) = A_\alpha \alpha(\vec{\sigma}_k) + A_\kappa \kappa(\vec{\sigma}_k)$$

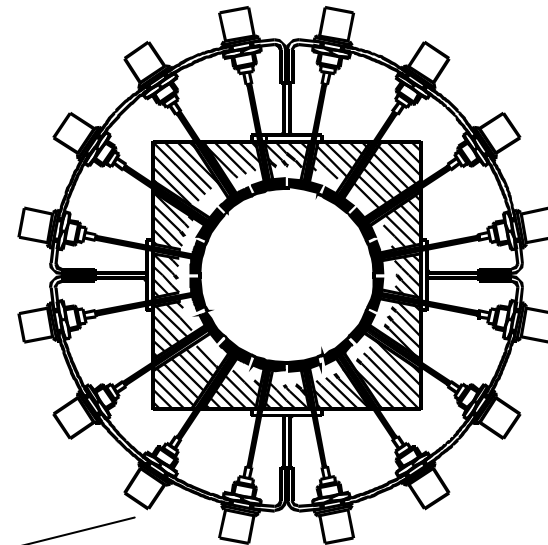
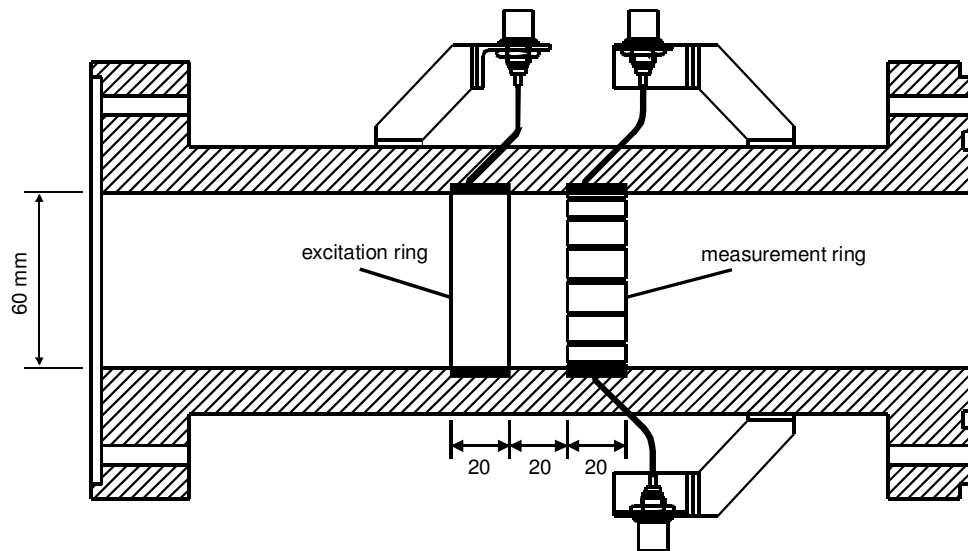
Operador de simetria

Operador de fração de fase

Termos de Penalização

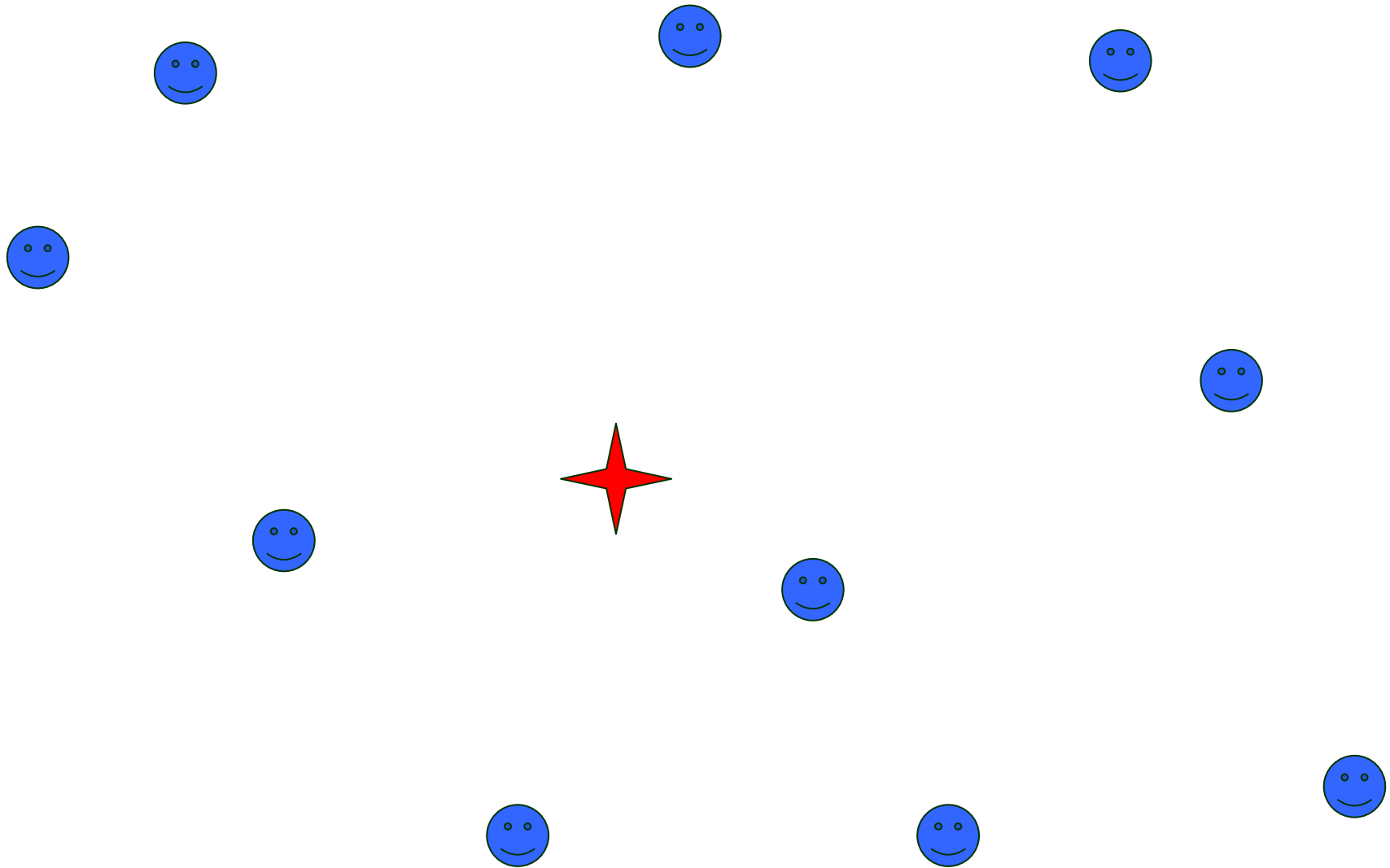


Termos de Penalização

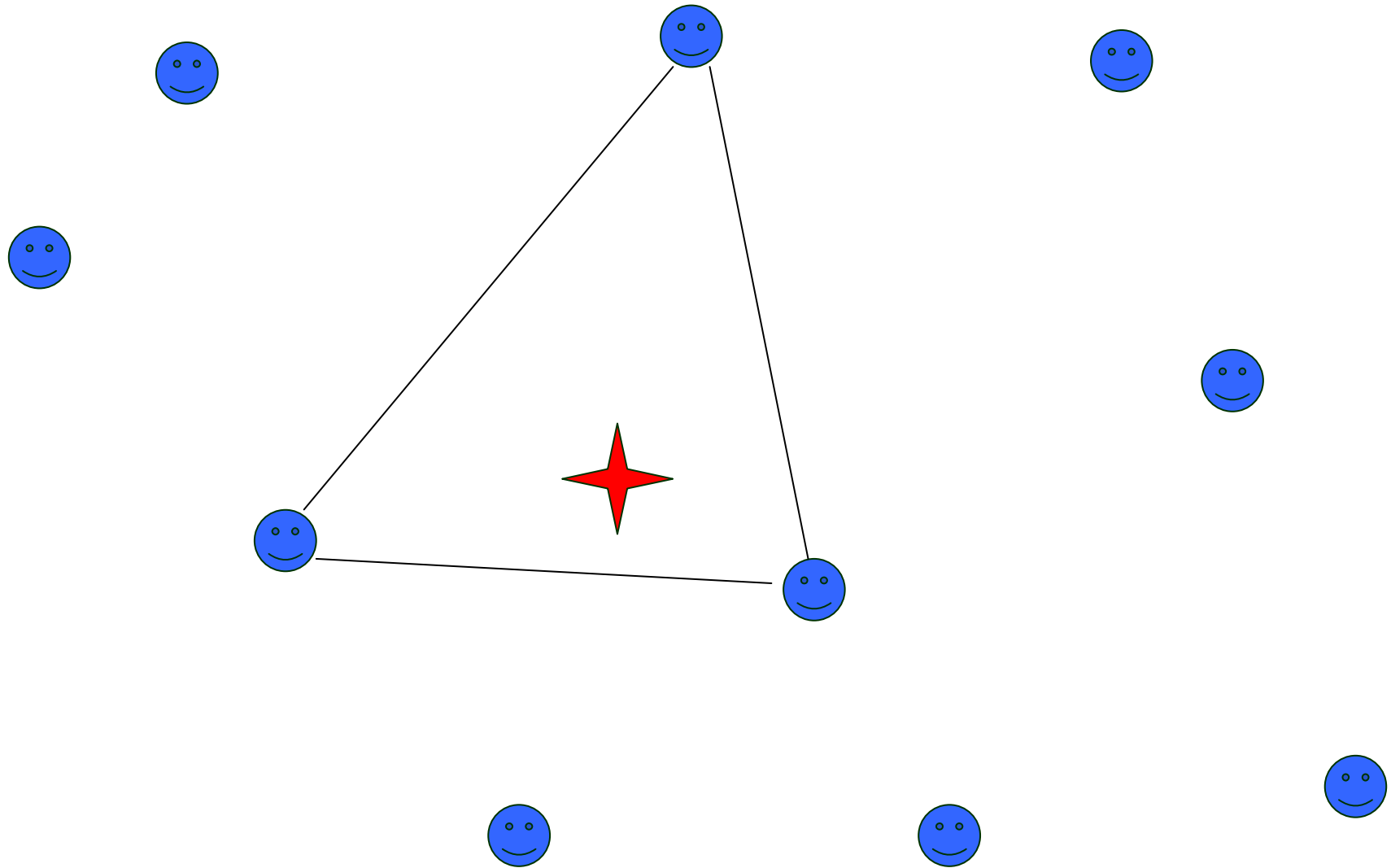


A fração de fase e a simetria podem ser calculadas diretamente a partir dos sinais dos eletrodos de medida.

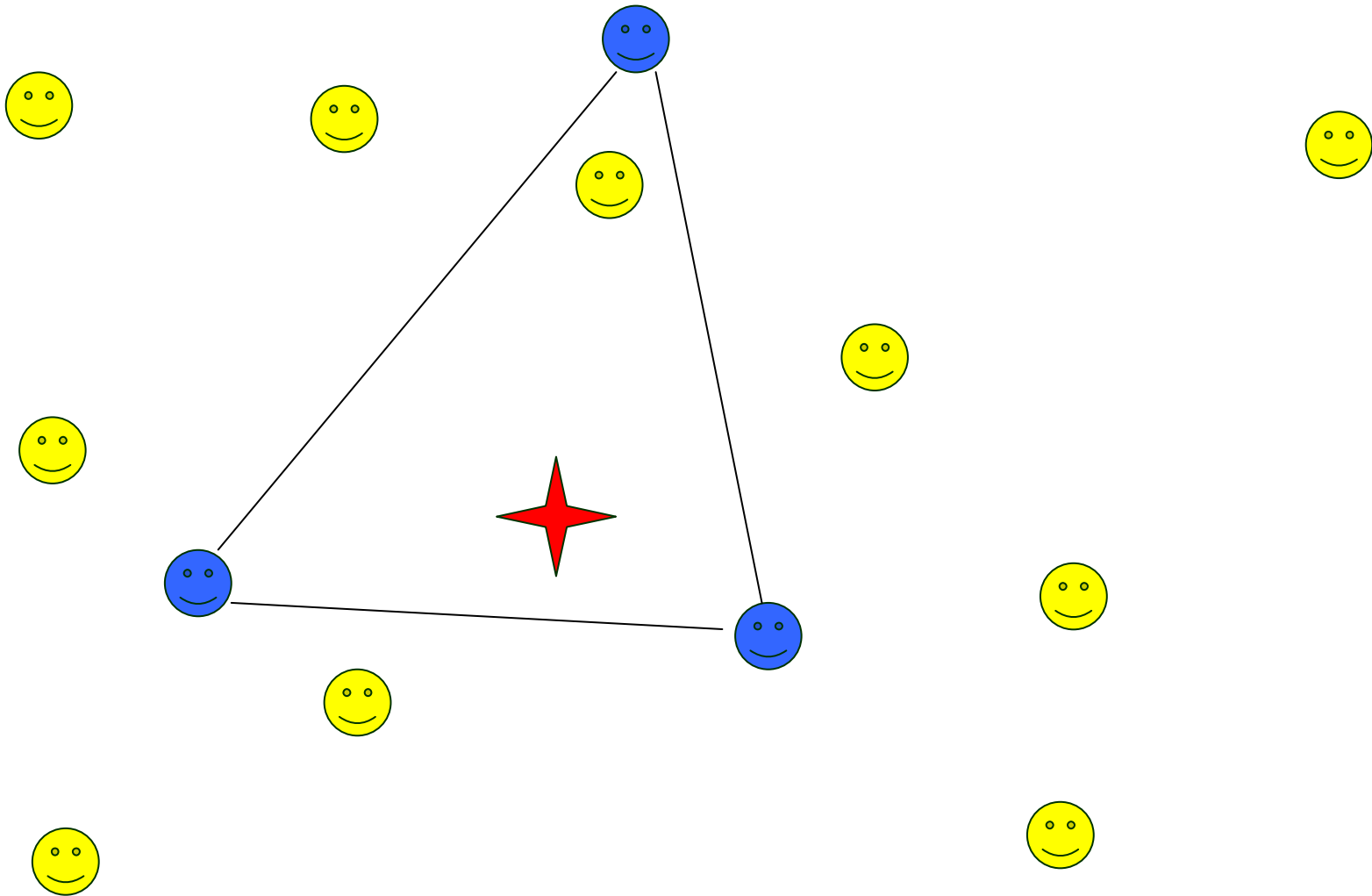
Heurística: população inicial



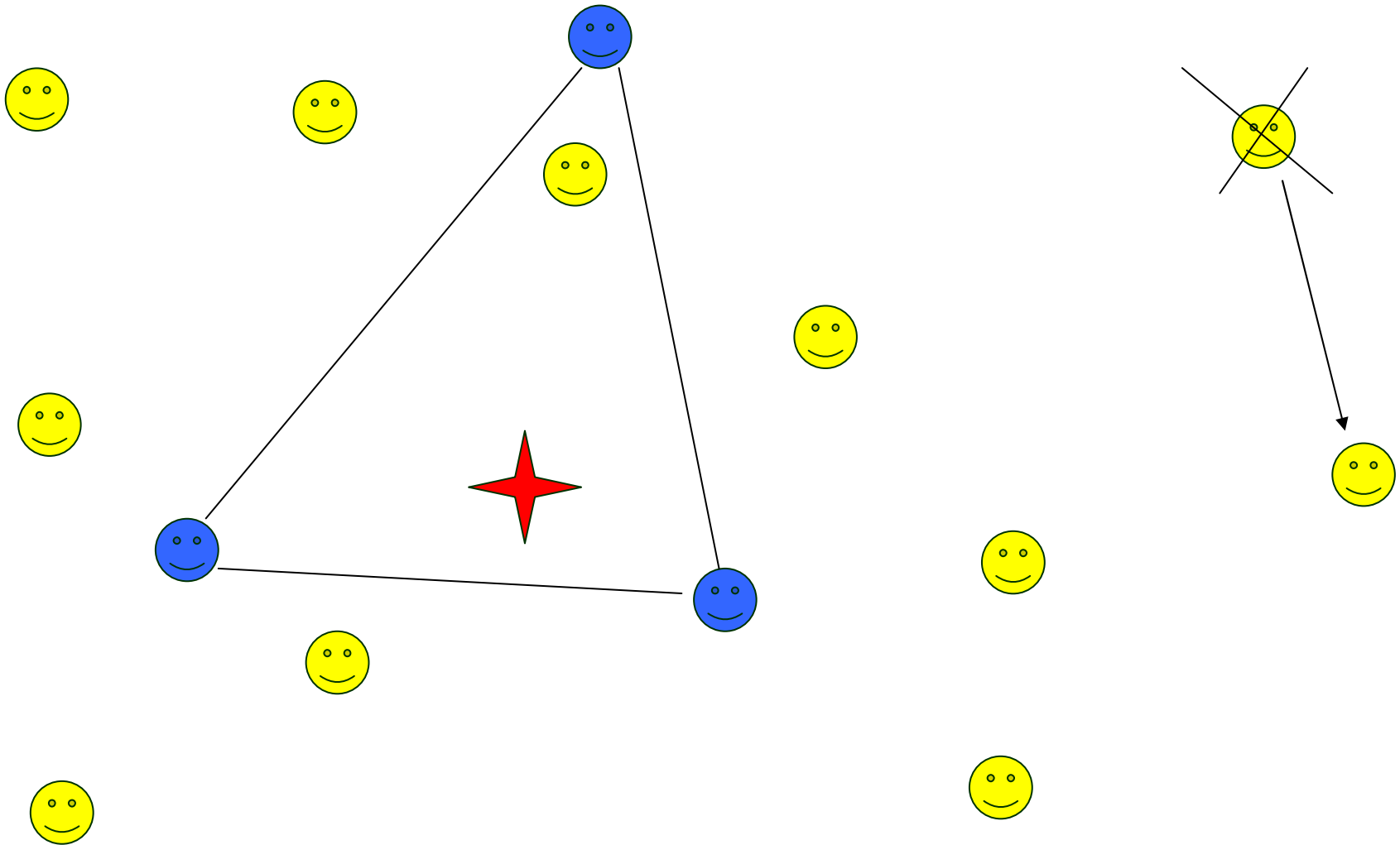
Heurística: seleção dos mais aptos



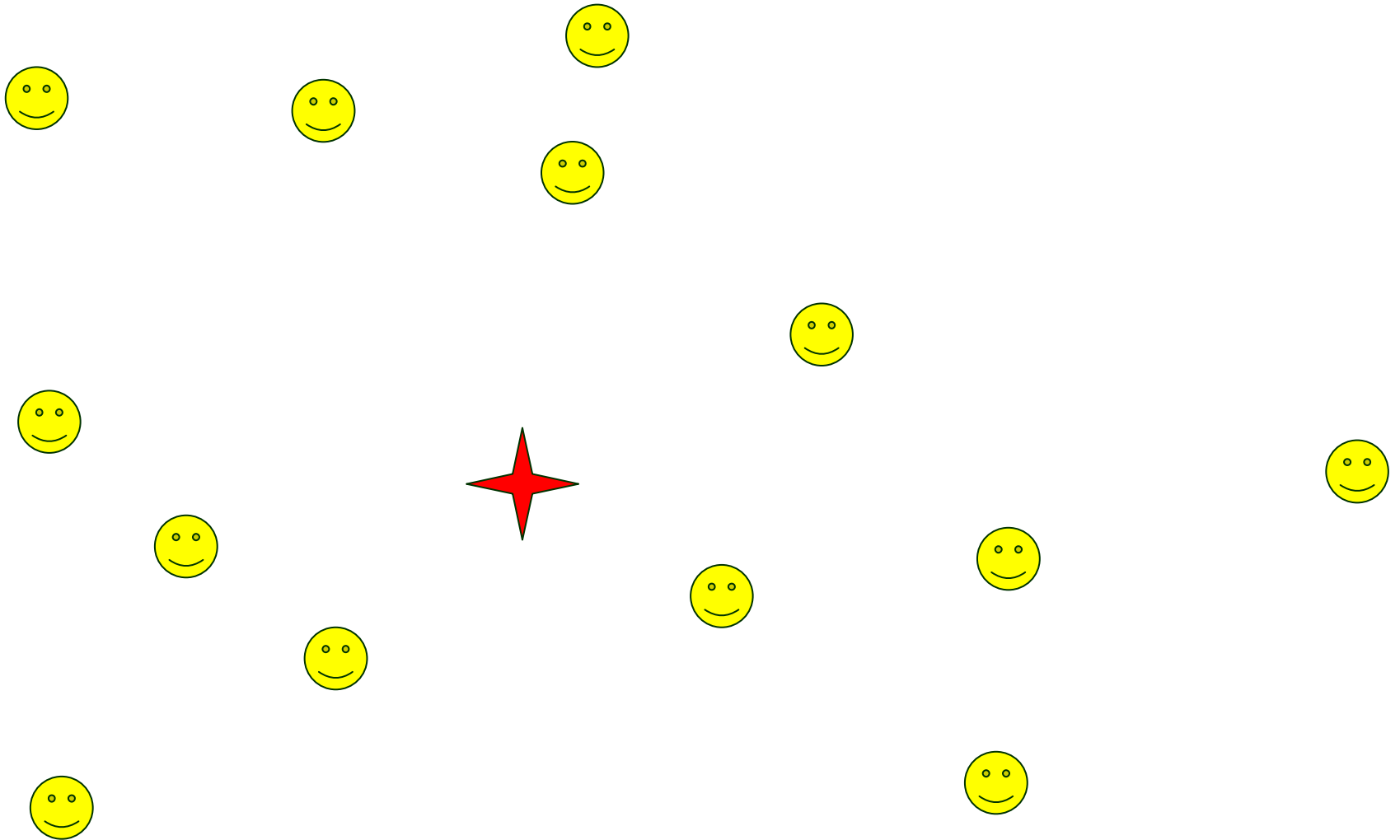
Heurística: reprodução



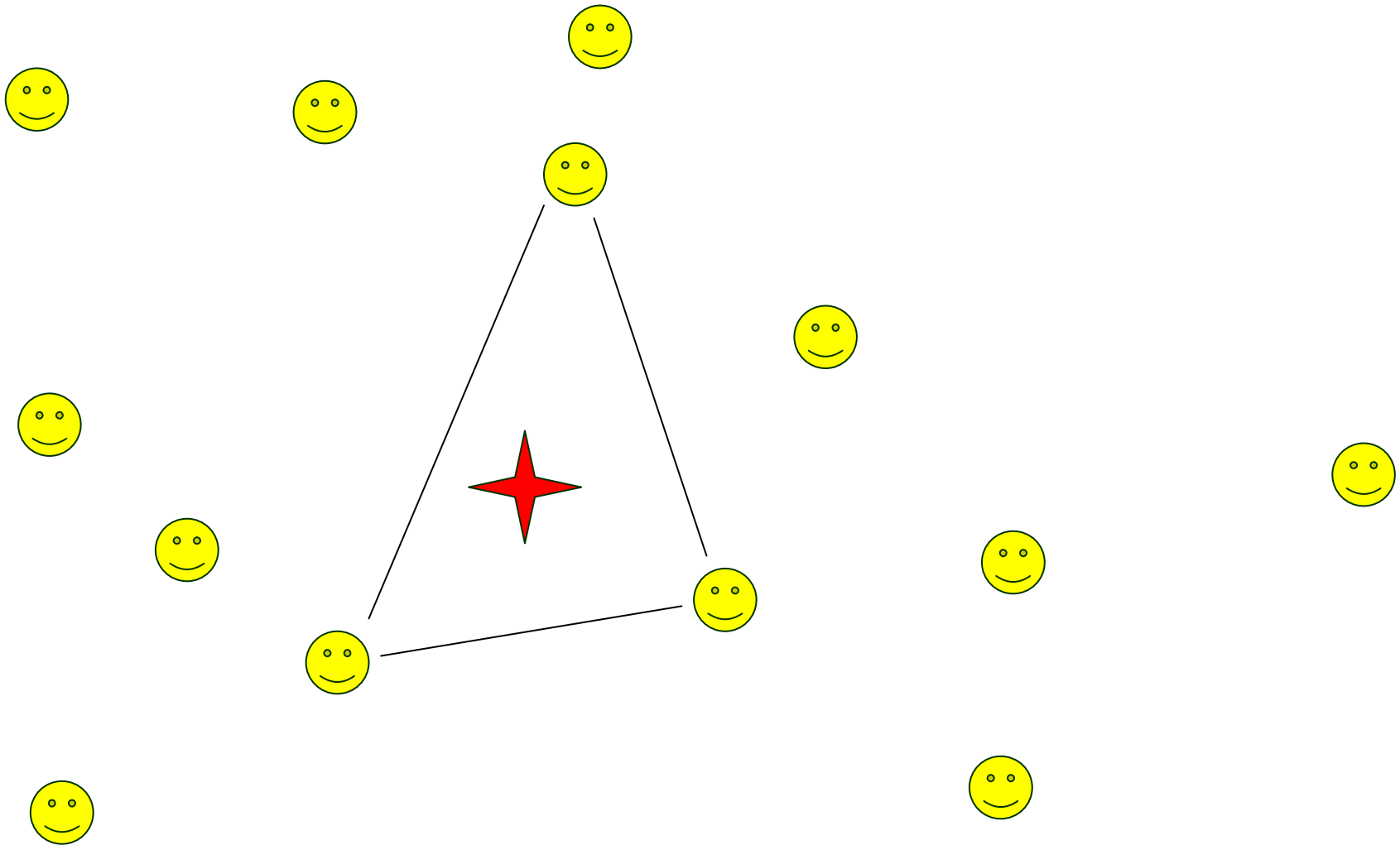
Heurística: mutação



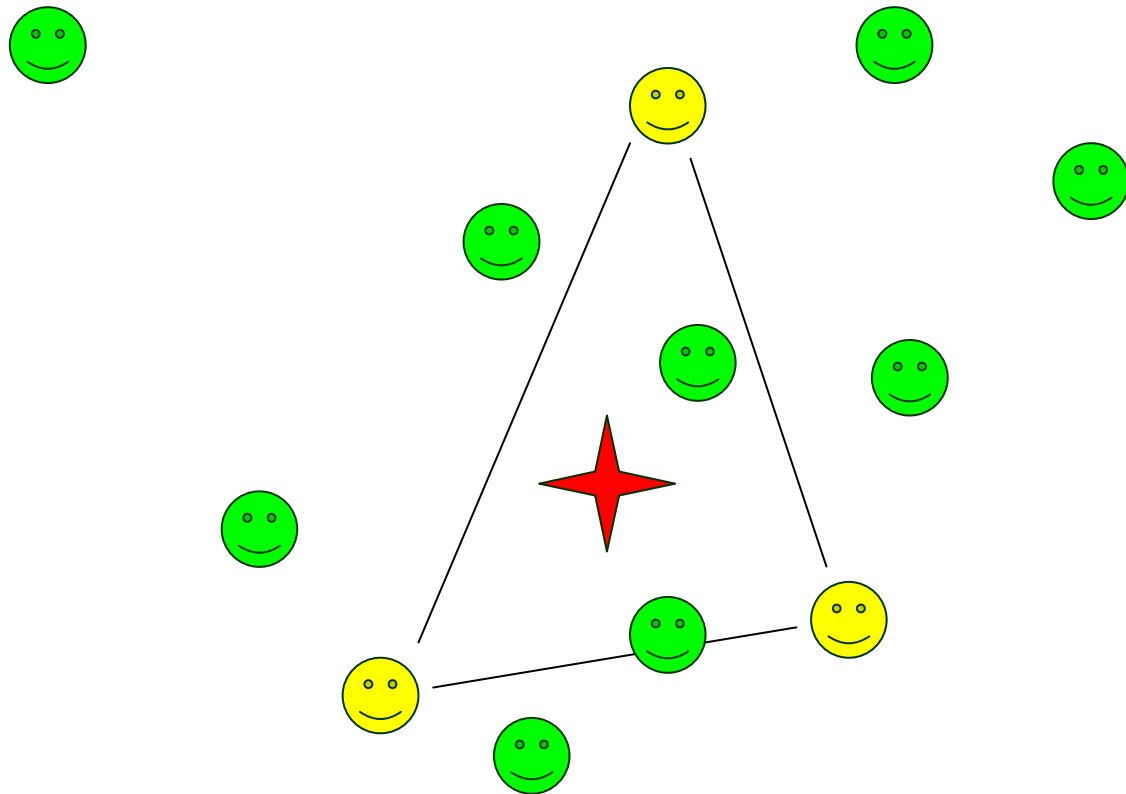
Heurística: nova geração (incluindo antigos pais)



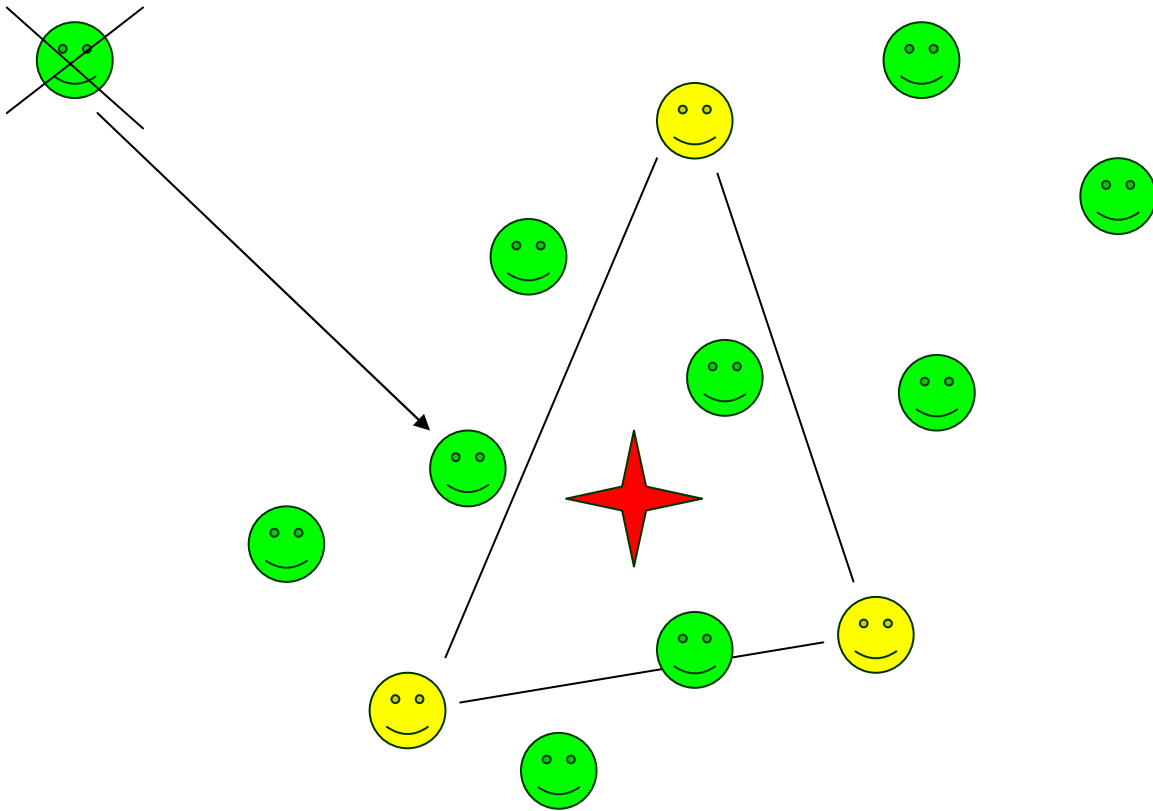
Heurística: seleção dos mais aptos



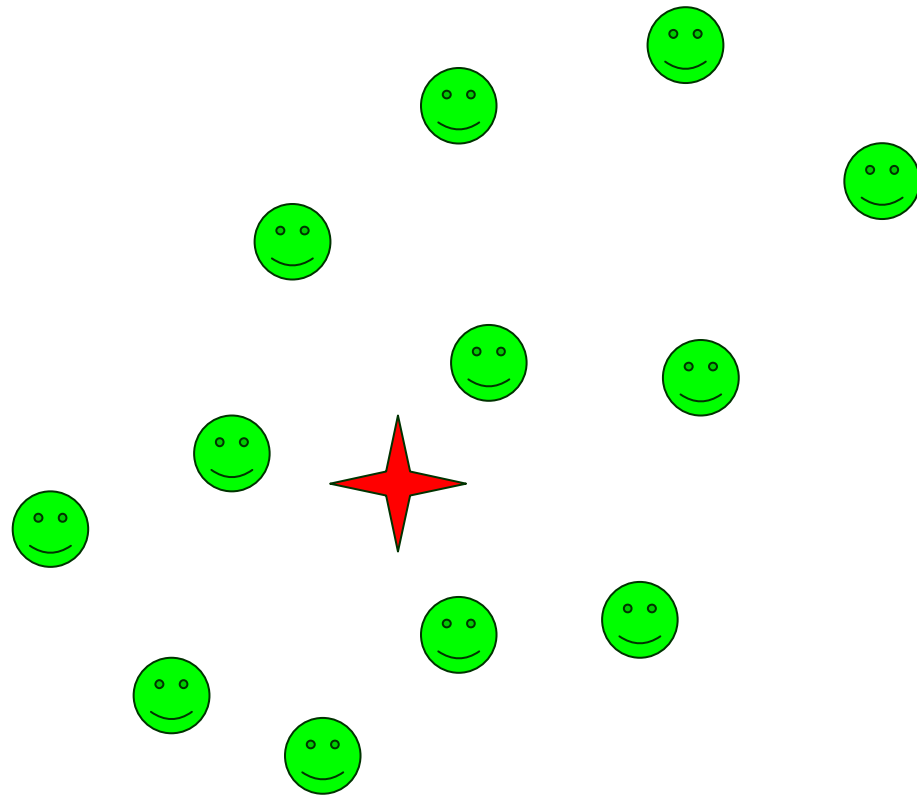
Heurística: reprodução



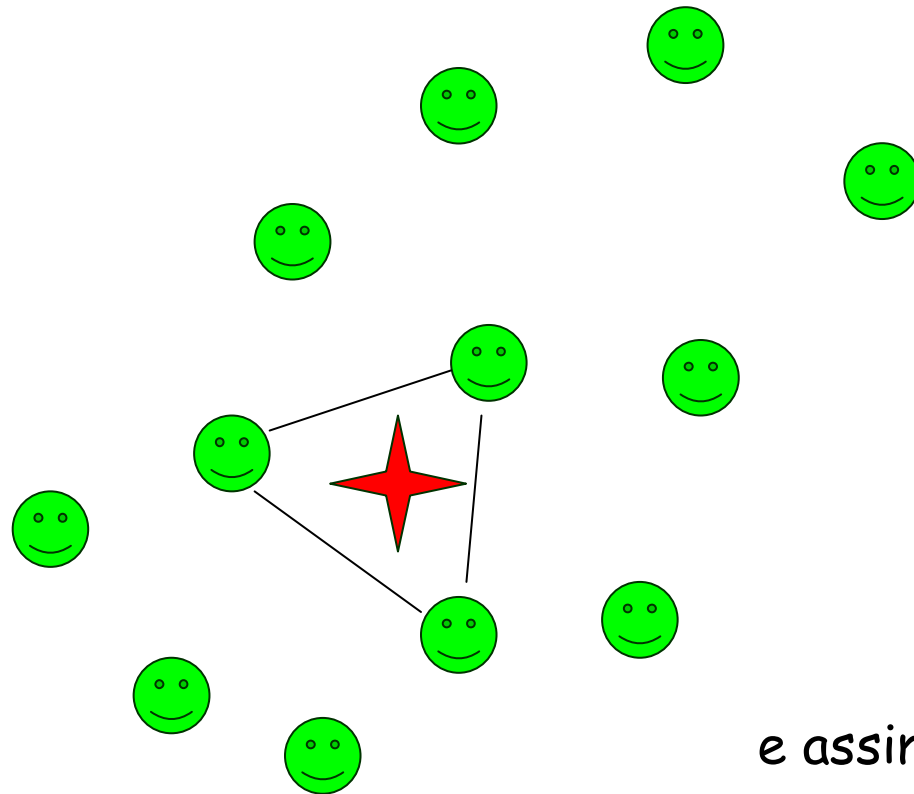
Heurística: mutação



Heurística: nova geração (incluindo antigos pais)



Heurística: seleção dos mais aptos

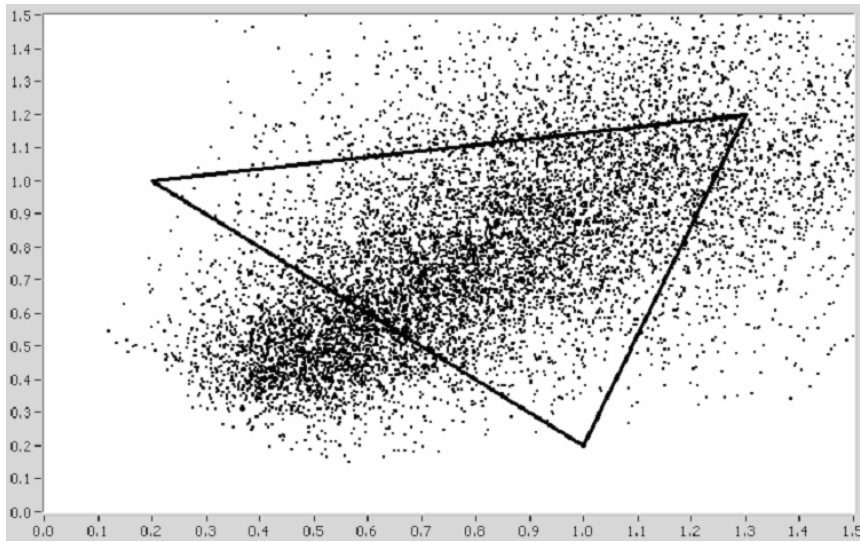


e assim por diante...

Operadores de reprodução

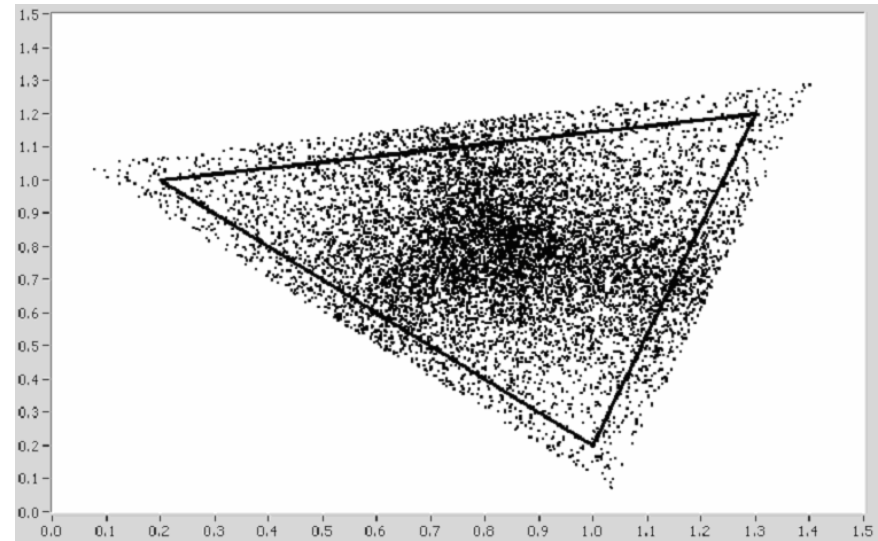
média ponderada

$$\vec{\sigma} = \sum_{j=1}^{N_{\text{pais}}} w_j \cdot \vec{\sigma}_j$$



média fuzzy

$$\vec{\sigma} = \sum_{k=1}^{N_{\text{pais}}} \left(\delta W_k \vec{\sigma}_k + \frac{(1-\delta)}{N_{\text{pais}}} \cdot \sum_{j=1}^{N_{\text{pais}}} \vec{\sigma}_j \right)$$



Operadores de mutação

posições aleatórias



$\sigma = (1.23, \mathbf{1.44}, 5.88, 79.00, 0.55, \mathbf{0.01}, 1.89, 4.55, 28.99)$



$\sigma = (1.23, \mathbf{1.00}, 5.88, 79.00, 0.55, \mathbf{80.00}, 1.89, 4.55, 28.99)$

conhecimento a priori sobre o problema

Arquiteturas de paralelização

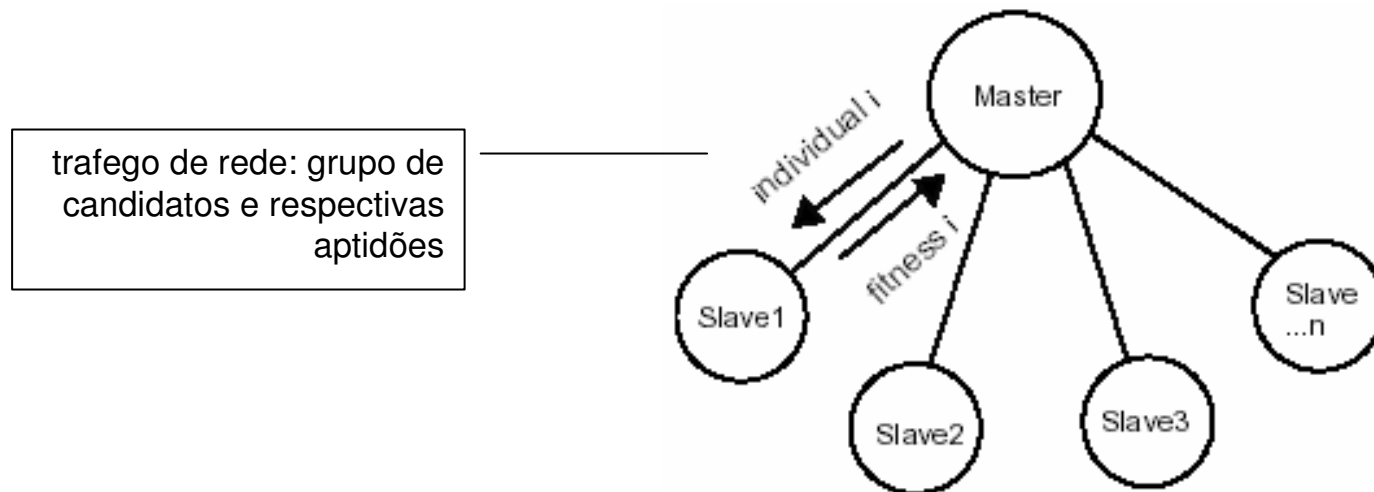
1. Mestre - escravo

2. Ilha

3. Celular

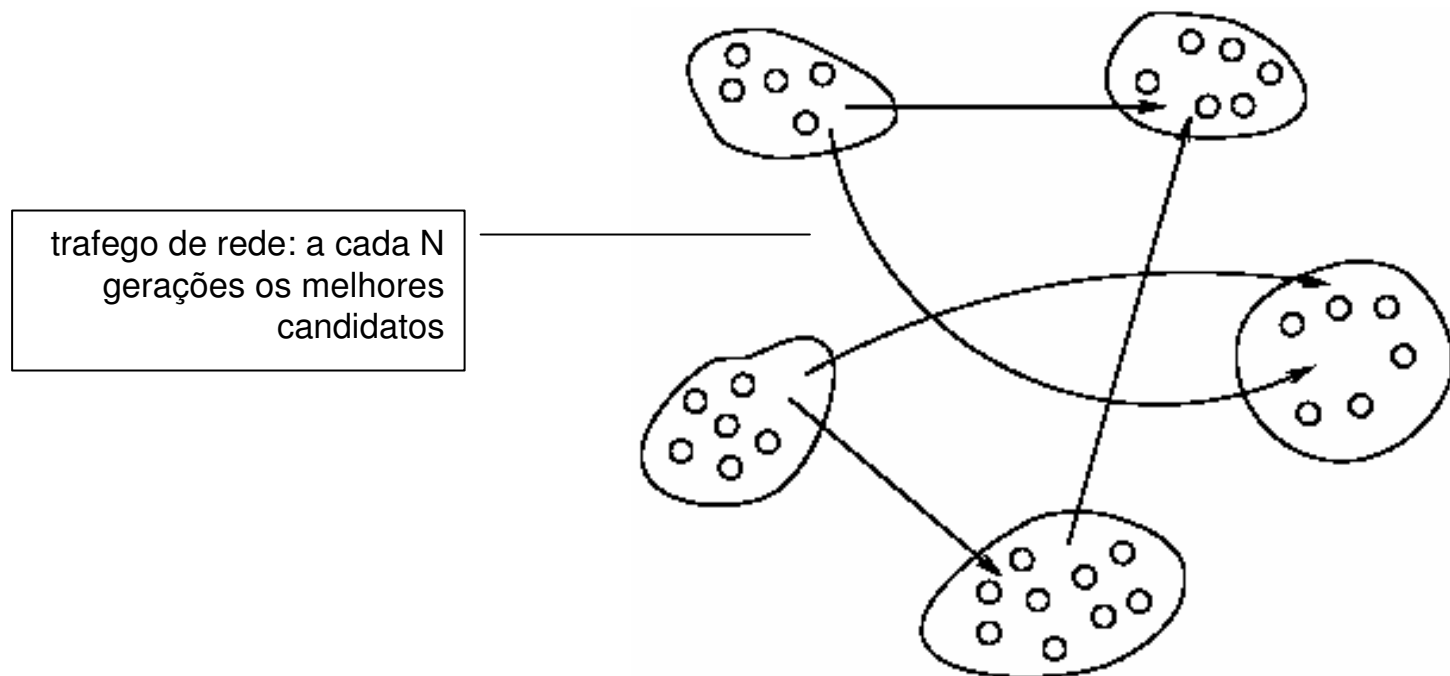
Arquitetura mestre - escravo

1. Mestre: reprodução, mutação e seleção dos mais aptos para reprodução
2. Escravos: recebem do mestre um grupo de candidatos e avaliam sua aptidão, i.e. resolvem o problema direto.



Arquitetura ilha

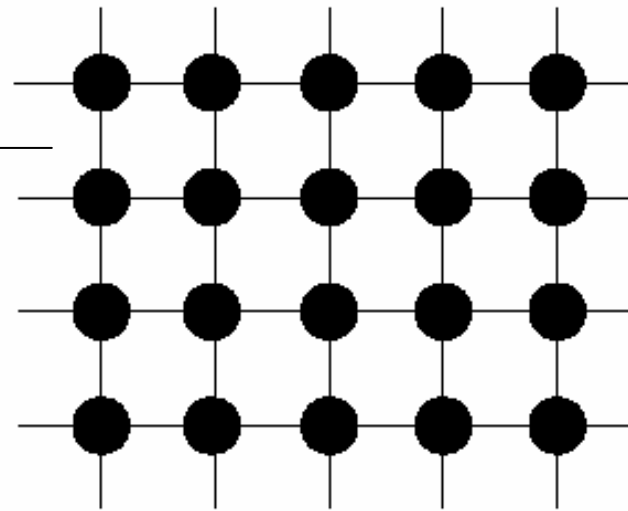
1. Cada processador recebe um grupo de candidatos e executa o GA por N de gerações
2. Após N gerações os melhores candidatos de cada ilha são selecionados



Arquitetura celular

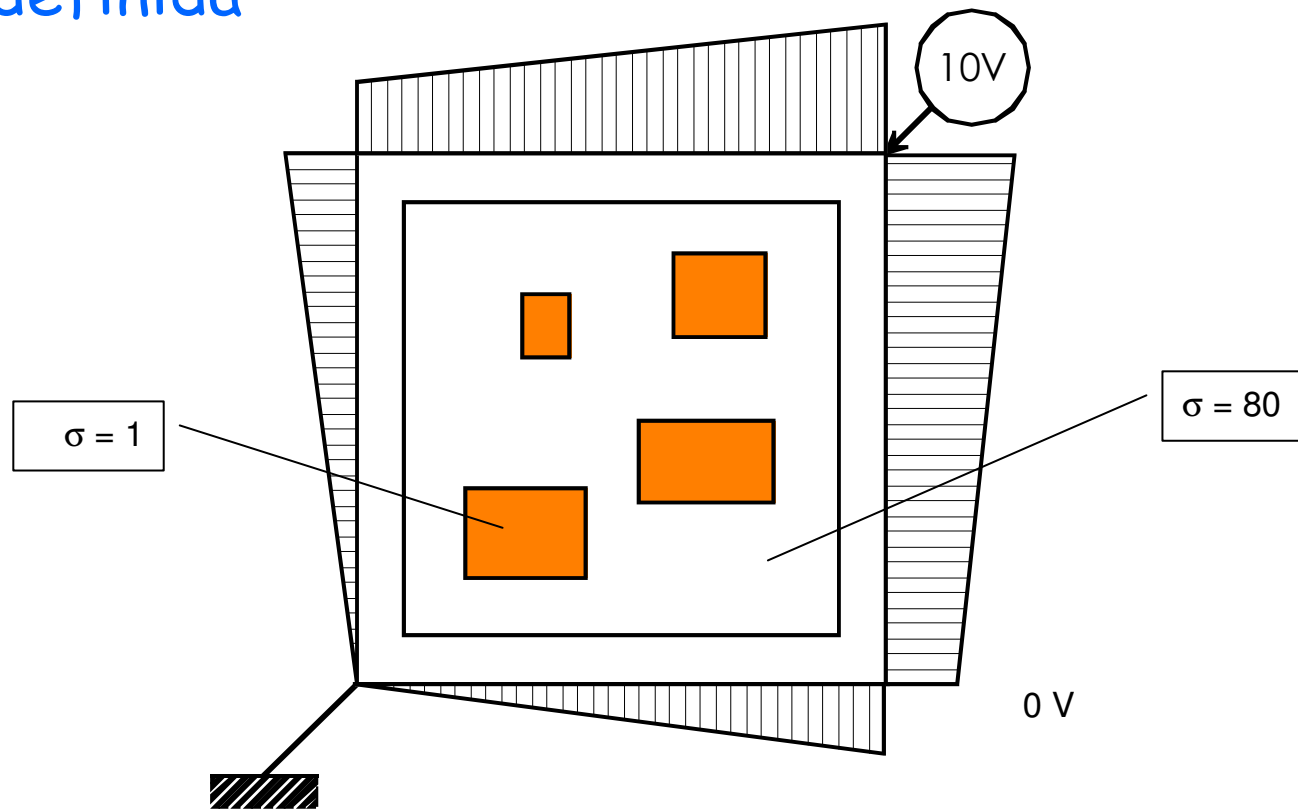
1. A população inicial é distribuída sobre uma grade 2D em função dos respectivos valores de aptidão (elitismo)
2. Somente os candidatos vizinhos podem reproduzir
3. O cálculo da aptidão é distribuído cf. mestre-escravo

tráfego de rede: cada candidato e seus vizinhos (duplicação)

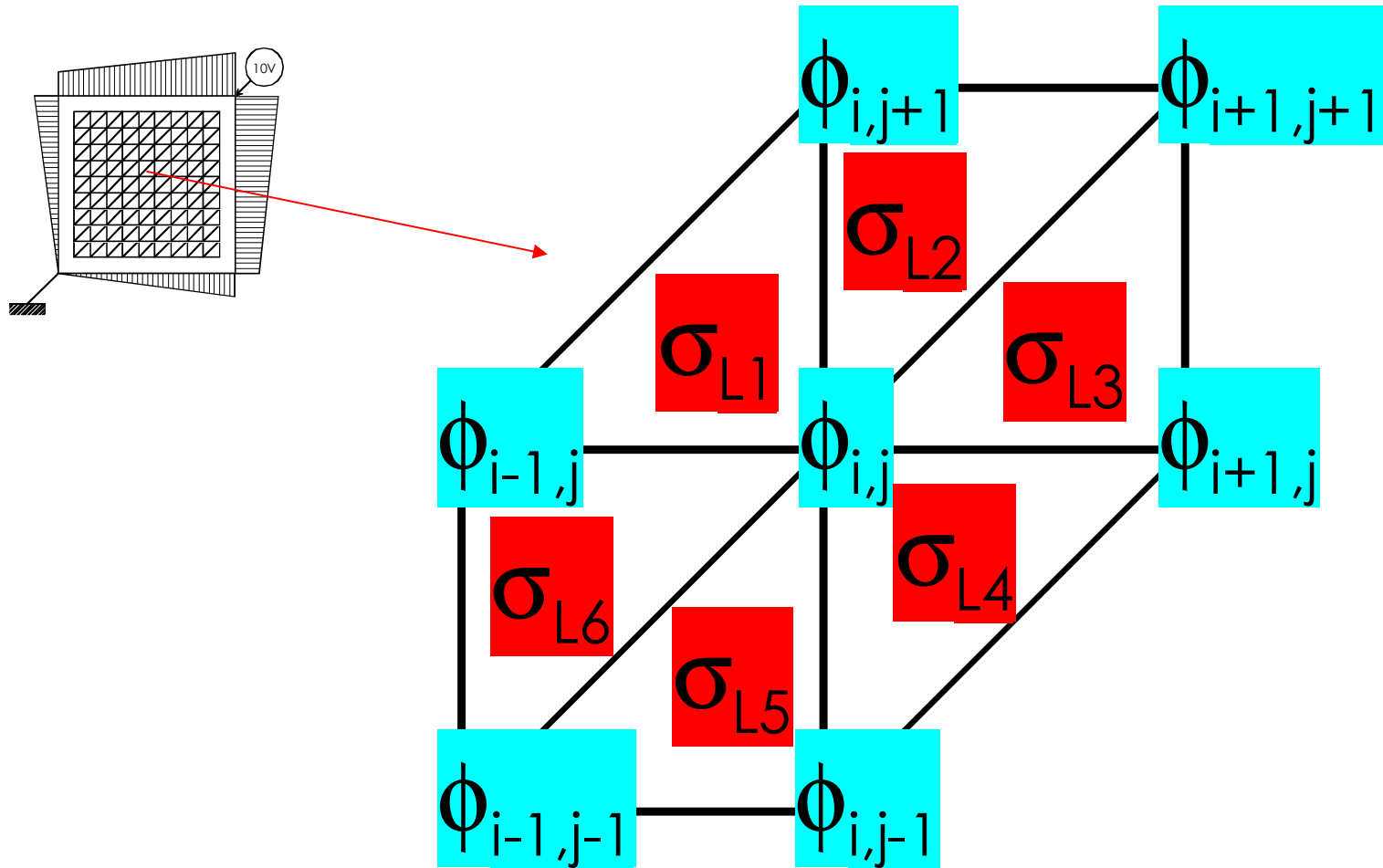


Estudo de caso

Discretização por elementos finitos triangulares - matriz simétrica e positiva definida



Discretização



Discretização

Equação discretizada

$$A\phi_{i,j-1} + B\phi_{i-1,j} + C\phi_{ij} + D\phi_{i+1,j} + E\phi_{ij+1} = 0$$

Termos da matriz

$$A = -\frac{1}{2} \cdot (\sigma_{L1} + \sigma_{L2})$$

$$D = -\frac{1}{2} \cdot (\sigma_{L3} + \sigma_{L6})$$

$$B = -\frac{1}{2} \cdot (\sigma_{L1} + \sigma_{L4})$$

$$E = -\frac{1}{2} \cdot (\sigma_{L5} + \sigma_{L6})$$

$$C = 1 \cdot (\sigma_{L1} + \sigma_{L6}) + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{L2} + \sigma_{L3} + \sigma_{L4} + \sigma_{L5})$$

Resultados - cada caso foi executado 10 vezes

	Mestre-escravo	Ilha	Celular
Nr. de avaliações	45.562,8	13.321,1	48.000,0
Tempo de execução (s)	3,873	0,785	2,291
Nr. mínimo de gerações	23	3	4
Nr. máximo de gerações	318	30	40

Conclusões e perspectivas

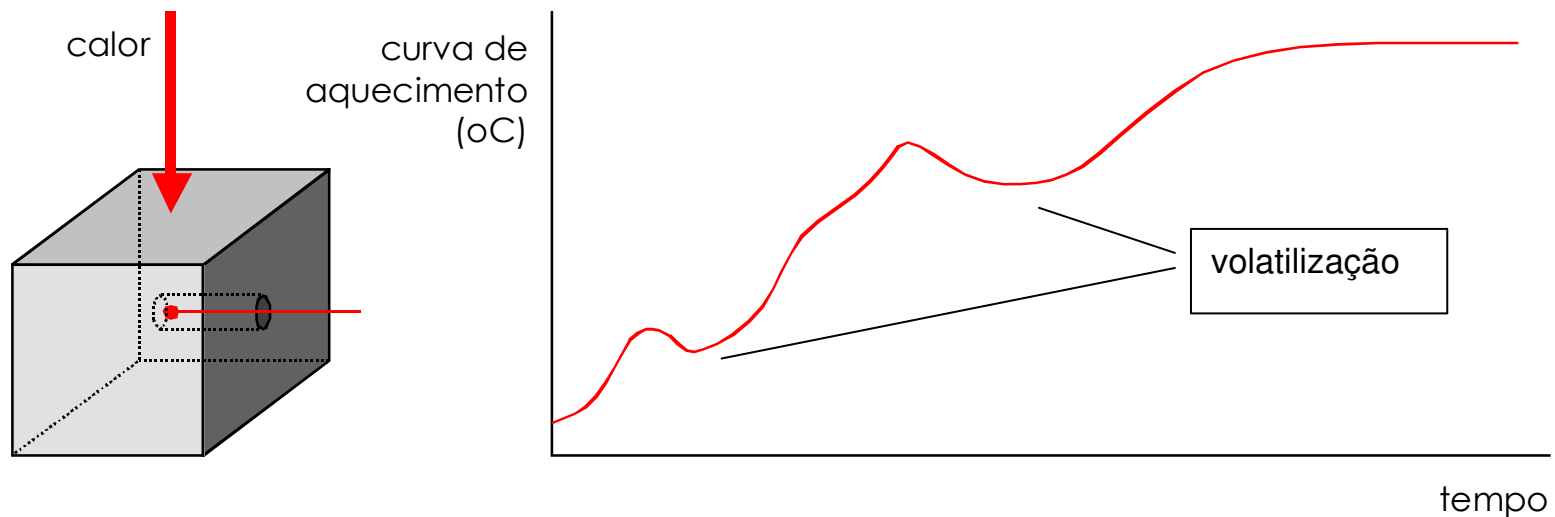
1. O GA deve ser "pilotado": por exemplo a taxa de mutação deve ser maximizada caso a população seja aprisionada em um platô ou mínimo local (esse diagnostico pode ser feito analisando-se as características morfológicas de cada geração)
2. A arquitetura ilha e mais rápida mas a qualidade da solução obtida através do modelo celular e melhor - combinar os dois

Solução do problema inverso acoplado condução-
convecção - aplicação da TSVD na regularização
do funcional de erro

Analice C. Brandi
analice@sc.usp.br

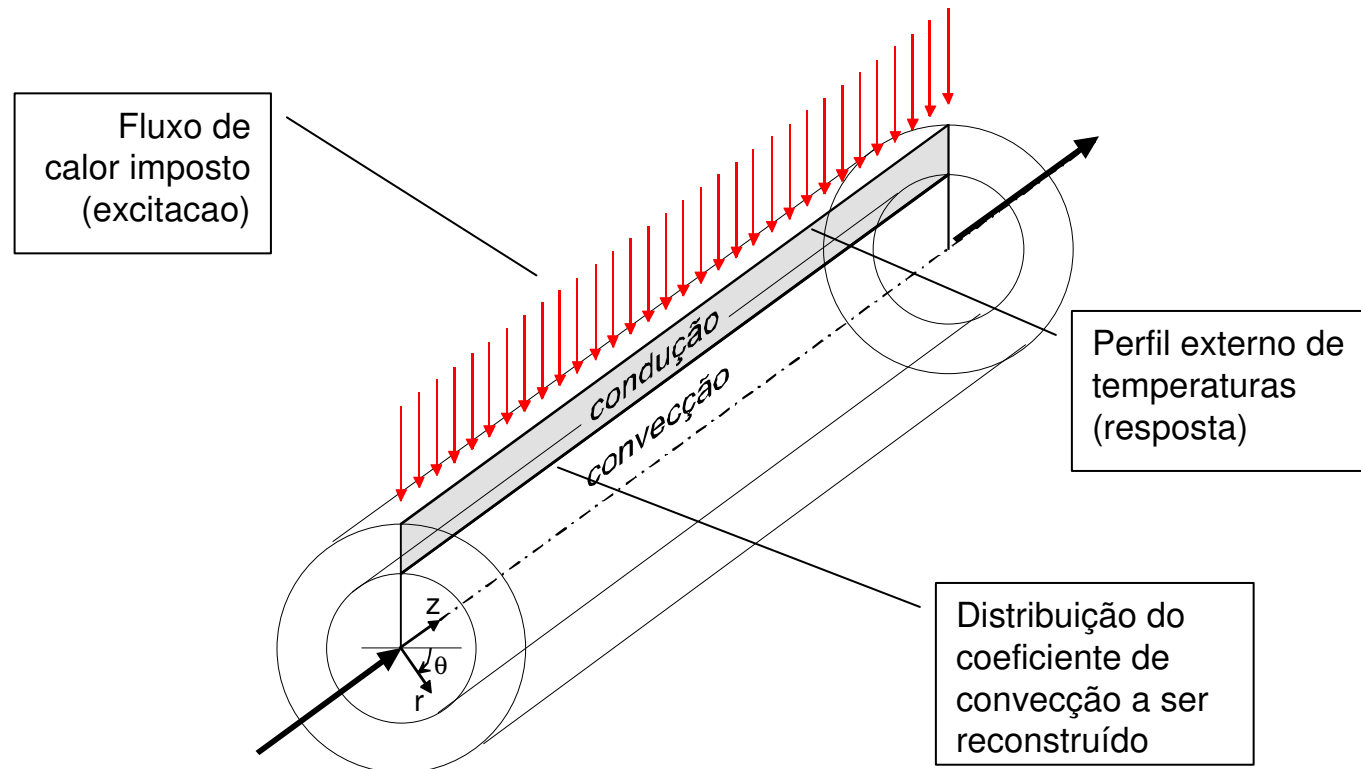
Descrição do problema

Análise térmica diferencial: a constituição físico-química de uma substância determina como ela absorve calor e, conseqüentemente, sua curva de aquecimento



Descrição do problema

Monitoramento em fluxo em um processo industrial:
análise indireta através do coeficiente de convecção



Equacionamento

Condução

$$\nabla^2 T = 0 \quad (r, z) \in [r_{\text{int}}, r_{\text{ext}}] \times [0, L]$$

Convecção

$$\alpha \nabla^2 T - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = 0 \quad (r, z) \in [0, r_{\text{int}}] \times [0, L]$$

Acoplamento

$$-k \frac{\partial T}{\partial r}(r_{\text{ext}}, z) = h(z) [T(0, z) - T(r_{\text{int}}, z)] \quad z \in [0, L]$$

Condições de contorno

Perfil de temperatura na entrada

$$T(r,0) = T_{\text{entra}}(r) \quad r \in [0, r_{\text{ext}}]$$

Perfil de temperatura na saída

$$T(r,L) = T_{\text{saida}}(r) \quad r \in [0, r_{\text{ext}}]$$

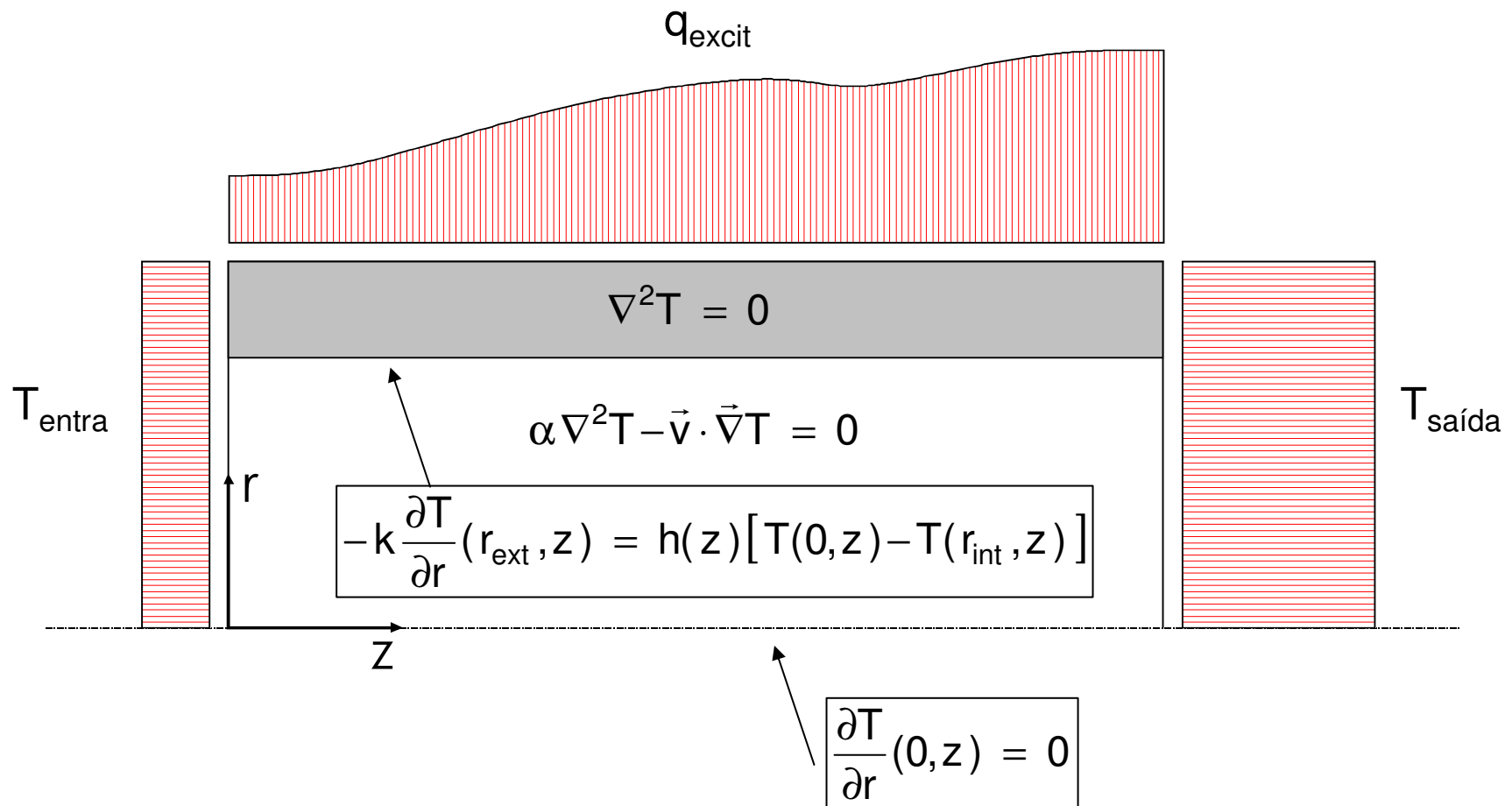
Fluxo de calor na superfície externa (excitação)

$$-k \frac{\partial T}{\partial r}(r_{\text{ext}}, z) = q_{\text{excit}}(z) \quad z \in [0, L]$$

Axissimetria

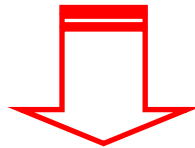
$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, z) = 0 \quad z \in [0, L]$$

Condições de contorno

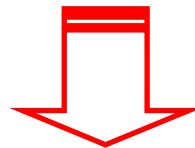


Natureza do problema

As variáveis do problema são as distribuições de temperatura e do coeficiente de convecção ...



O problema é mal posto (mais variáveis que equações)...



É necessário introduzir informações adicionais...

Informações adicionais

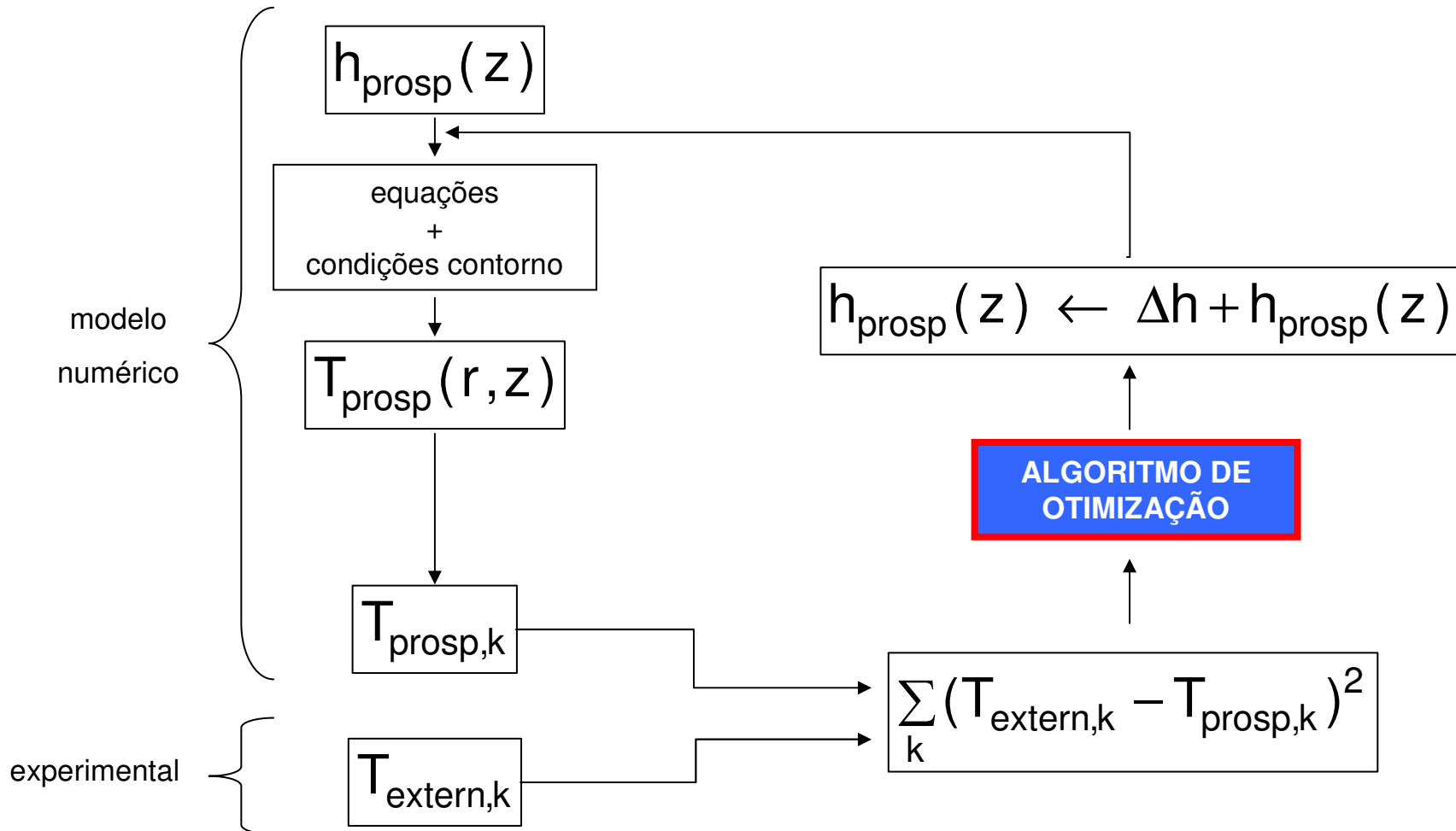
Temperatura em pontos da superfície externa

$$T(r_{\text{extern}}, z_k) = T_{\text{extern},k}$$

Observação: o perfil de velocidades é conhecido (laminar p.e.)

$$\vec{v}(r, z) = V_{\text{max}} \left[1 - \left(\frac{r}{r_{\text{ext}}} \right)^2 \right] \hat{r}$$

Formulação do problema inverso - funcional de erro



Algoritmo de otimização (busca do mínimo)

Discretização de $h(z)$

$$h(z) \Leftrightarrow [h_0, h_1, h_2, \dots, h_N]$$

Funcional se torna uma função de h_k

$$e[\{h\}] = e(h_0, h_1, h_2, \dots, h_N)$$

Procedimento de otimização (iteração em i)

$$\{h_k\}_{i+1} = \{h_k\}_i + \alpha_i \{d_k\}_i$$

α_i = passo de refinamento

$\{d_k\}_i$ = direção de refinamento

$$e[\{h_k\}_{i+1}] < e[\{h_k\}_i]$$

Algoritmo de otimização (busca do mínimo)

Método de Newton-Raphson

$$e[\{h_k\}_i + \{x_k\}] = e[\{h_k\}_i] + \vec{\nabla}e[\{h_k\}_i]^T \{x_k\} + \frac{1}{2} \{x_k\}^T D^2e[\{h_k\}_i] \{x_k\} + O[\{x_k\}^3]$$

matriz hessiana

$$\vec{\nabla}e[\{h_k\}_i + \{x_k\}] \cong \vec{\nabla}e[\{h_k\}_i] + D^2e[\{h_k\}_i] \{x_k\} \quad \vec{\nabla}e[\{h_k\}_i] = 0$$

estacionaridade

$$\{x_k\} \cong -\left(D^2e[\{h_k\}_i]\right)^{-1} \vec{\nabla}e[\{h_k\}_i]$$

$$\{h_k\} \cong \{h_k\}_i - \left(D^2e[\{h_k\}_i]\right)^{-1} \vec{\nabla}e[\{h_k\}_i]$$

$$\{d_k\}_i \cong -\left(D^2e[\{h_k\}_i]\right)^{-1} \vec{\nabla}e[\{h_k\}_i]$$

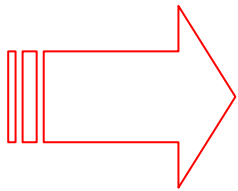
direção de otimização

Método de Newton-Raphson + TSVD

Desvantagens...

Cálculo de derivadas de segunda ordem
(patologia)

Custo computacional associado ao cálculo da
inversa da hessiana



SINGULAR VALUE DECOMPOSITION (SVD)

Pode ser implementado em máquinas paralelas

Efeito de regularização através do descarte
das direções patológicas (TSVD)

Singular Value Decomposition (SVD)

$$D^2 e[\{h\}] = \{U\}\{W\}\{V\}^T$$

1. A SVD pode ser feita mesmo que a matriz original seja altamente singular
2. As colunas de $\{U\}$ e $\{V\}$ são ortonormais

$$\sum_i U_{i,k} \cdot U_{i,n} = \delta_{k,n}$$

$$\sum_i V_{i,k} \cdot V_{i,n} = \delta_{k,n}$$

Singular Value Decomposition (SVD)

3. A matriz $\{W\}$ é diagonal contendo os autovalores da hessiana em ordem decrescente

$$\{W\} = \{\text{diag}(w_i)\}, \quad w_i \geq w_{i-1}$$

4. A inversa de $\{W\}$ pode ser calculada como

$$\{W\}^{-1} = \{1/\text{diag}(w_i)\}$$

Singular Value Decomposition (SVD)

5. $\{U\}$ e $\{W\}$ são bases ortonormais do range e do espaço nulo da hessiana (singular)

$$D^2e[\{h\}]\{x\} = \{y\}$$

range

$$D^2e[\{h\}]\{x\} = \{0\}$$

espaço
nulo

6. Cálculo da inversa

$$D^2e[\{h\}]^{-1} = [\{U\}\{W\}\{V\}^T]^{-1} = \{V\}\{W\}^{-1}\{U\}^T$$

Truncated Singular Value Decomposition (TSVD)

Calculo da direção de otimização

$$D^2e[\{h\}]\{d\} = -\vec{\nabla}e[\{h\}]$$

pertence ao range da hessiana ou não ???

Se o gradiente do erro pertence ao range da hessiana então existem infinitas soluções

$$D^2e[\{h\}]\{V\}_j = 0 \quad \text{quando } w_j = 0$$

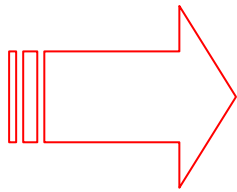
as colunas de $\{V\}$ são uma base do espaço nulo da hessiana

$$D^2e[\{h\}]CL(\{d\}, \{V\}_j) = -\vec{\nabla}e[\{h\}]$$

conjunto de possíveis direções de otimização

Truncated Singular Value Decomposition (TSVD)

Calculo da solução com a menor extensão



DESCARTAR AS COLUNAS DE $\{V\}$ COM RESPECTIVOS AUTOVALORES NULOS !

Formalmente isso equivale fazer...

Se $w_j = 0$ entao $1/w_j \leftarrow 0$ em $\{W\}^{-1}$

... ou seja, substituir infinito por zero no cálculo

$$\{d\} = -\{V\}\{\text{diag}(1/w_j)\}\{U\}^T \vec{\nabla}e[\{h\}]$$

Truncated Singular Value Decomposition (TSVD)

Calculo para matrizes não singulares porem mal condicionadas

Se $w_j < \delta$ entao $1/w_j \leftarrow 0$ em $\{W\}^{-1}$

$$\{d\} = - \underbrace{\{V\} \{diag(1/w_j)\} \{U\}^T}_{\text{pseudo-inversa}} \vec{v}_e[\{h\}]$$

Com isso são descartadas aquelas equações que atraem a solução para o espaço nulo...

Exemplo TSVD

$$\{H\} \{b\} = \{c\}$$

$$H_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i,j=1,2,\dots,Q$$

matriz de Hilbert

Quando

$$c_i = \frac{5(i-1)}{Q-1} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{2.5(i-1)}{Q-1} \right) \right], \quad i=1,2,\dots,Q$$

A solução analítica é

$$b_i = 4 \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\frac{5(i-1)}{Q-1} \right)^2 \exp \left[- \left(\frac{5(i-1)}{Q-1} \right)^2 \right], \quad i=1,2,\dots,Q$$

Exemplo TSVD

Corrompendo os dados com ruído branco

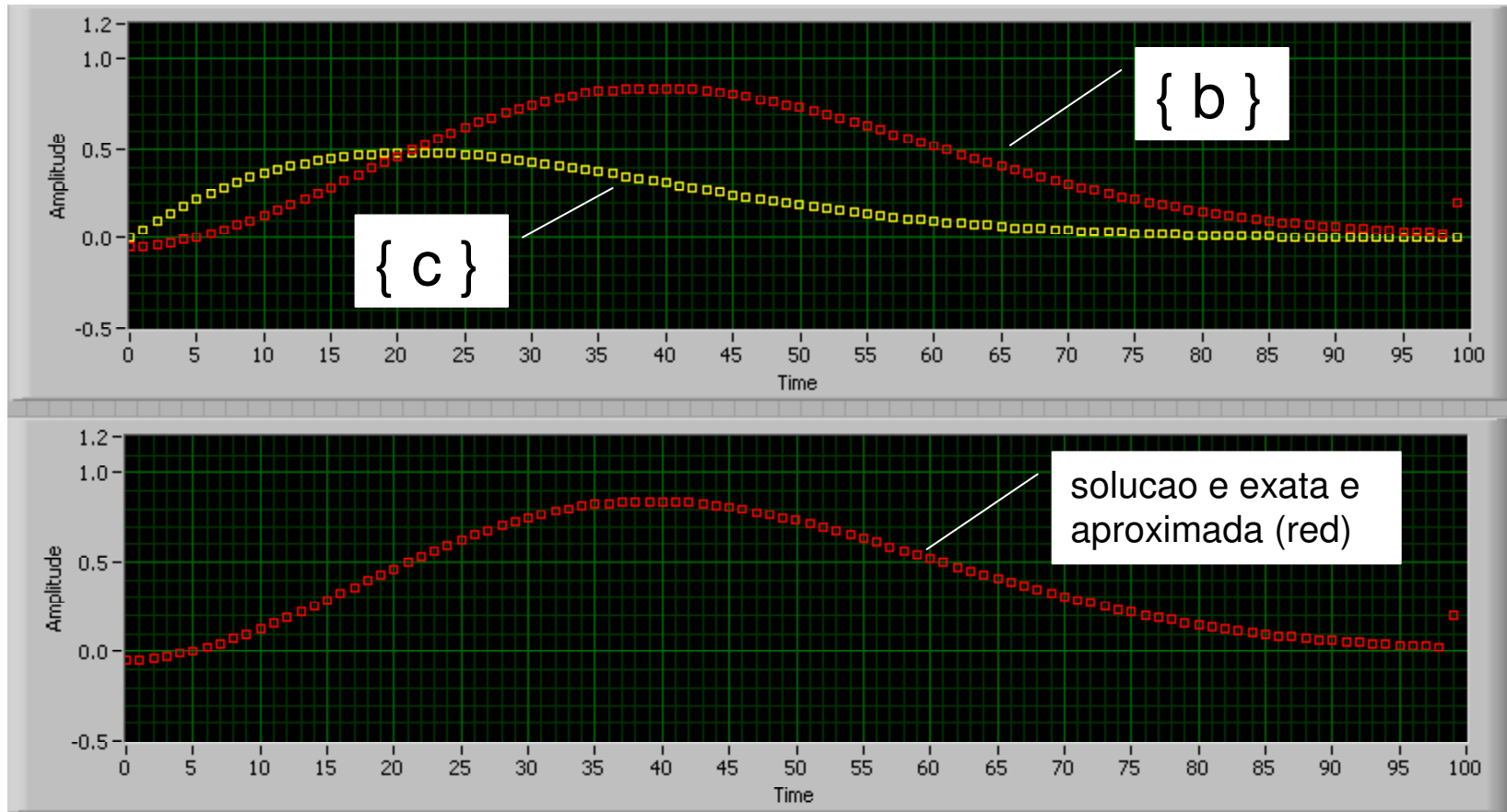
$$\{H\} \{b\} = \{c\} + \{\varepsilon\}$$

$$\bar{\varepsilon} = 0 \quad e \quad \varepsilon_{\max} = \begin{cases} 5.0 \cdot 10^{-3} \\ 1.0 \cdot 10^{-2} \\ 1.5 \cdot 10^{-2} \end{cases}$$

Definindo níveis de corte

$$\delta = \begin{cases} 0.0 \\ 5.0 \cdot 10^{-2} \\ 1.5 \cdot 10^{-1} \end{cases}$$

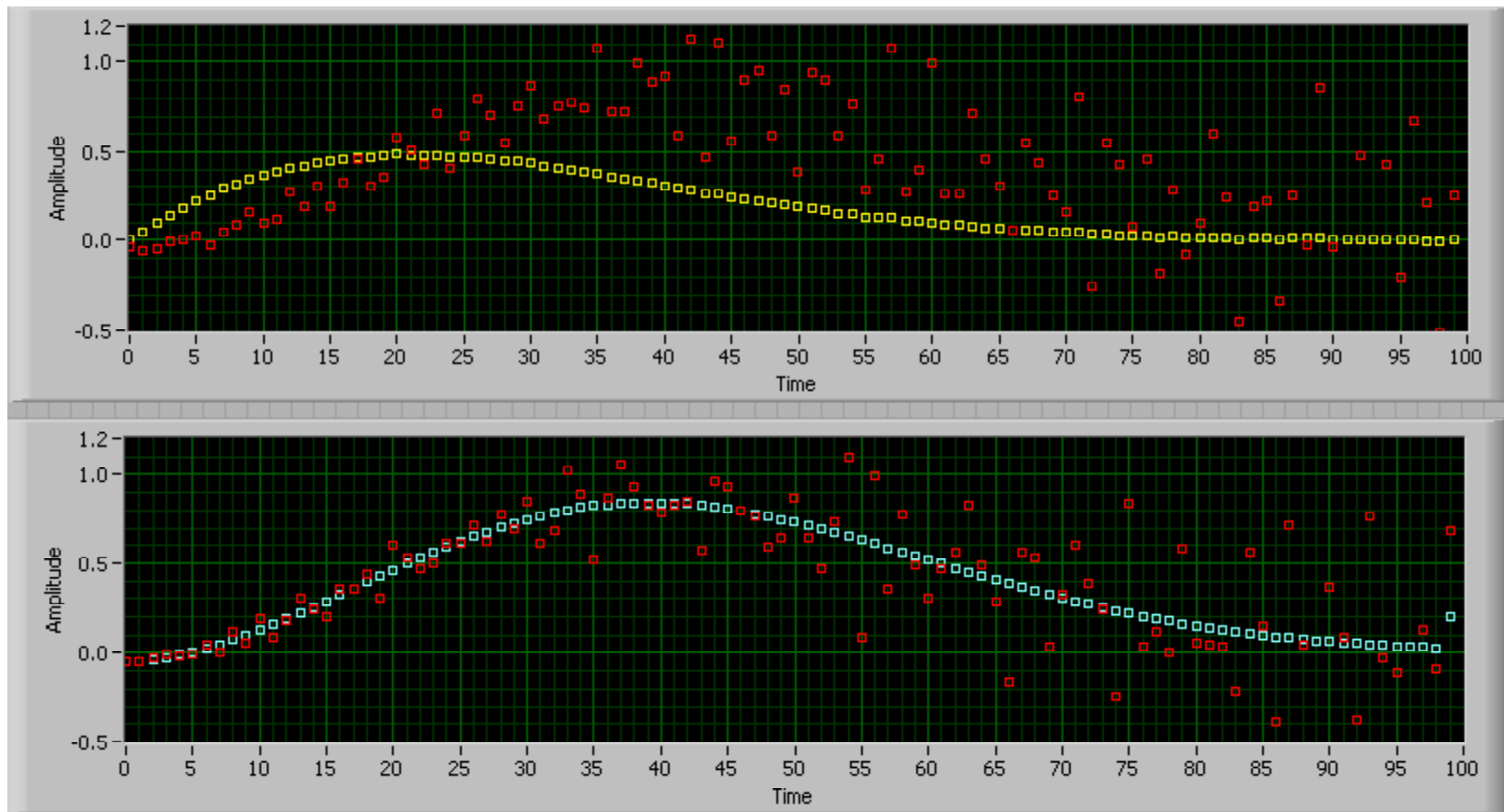
Solução de referência (ordem = 100)



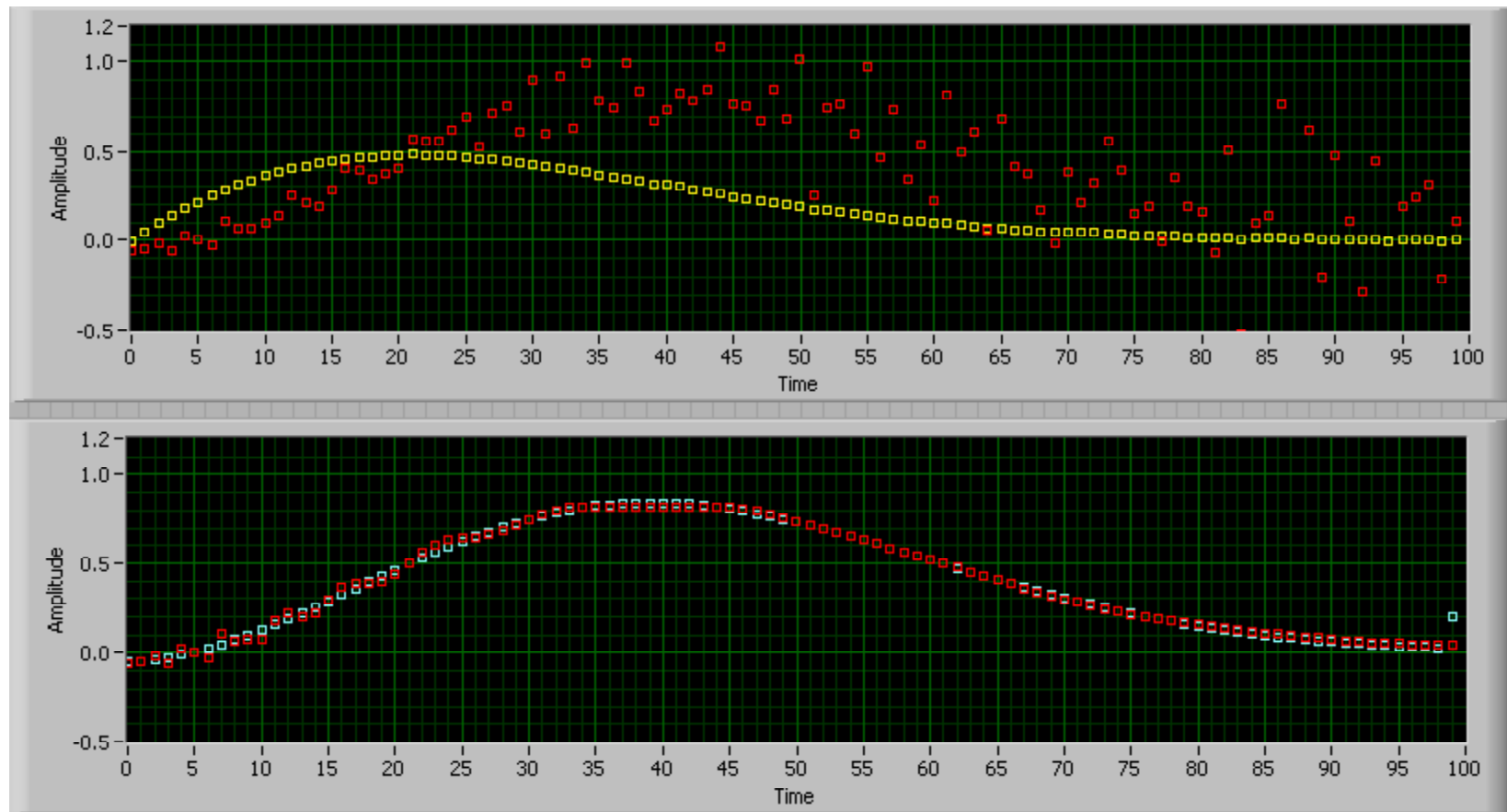
Solução de referência (ordem = 100)

$$\text{Ruído} = 5.0e-3$$

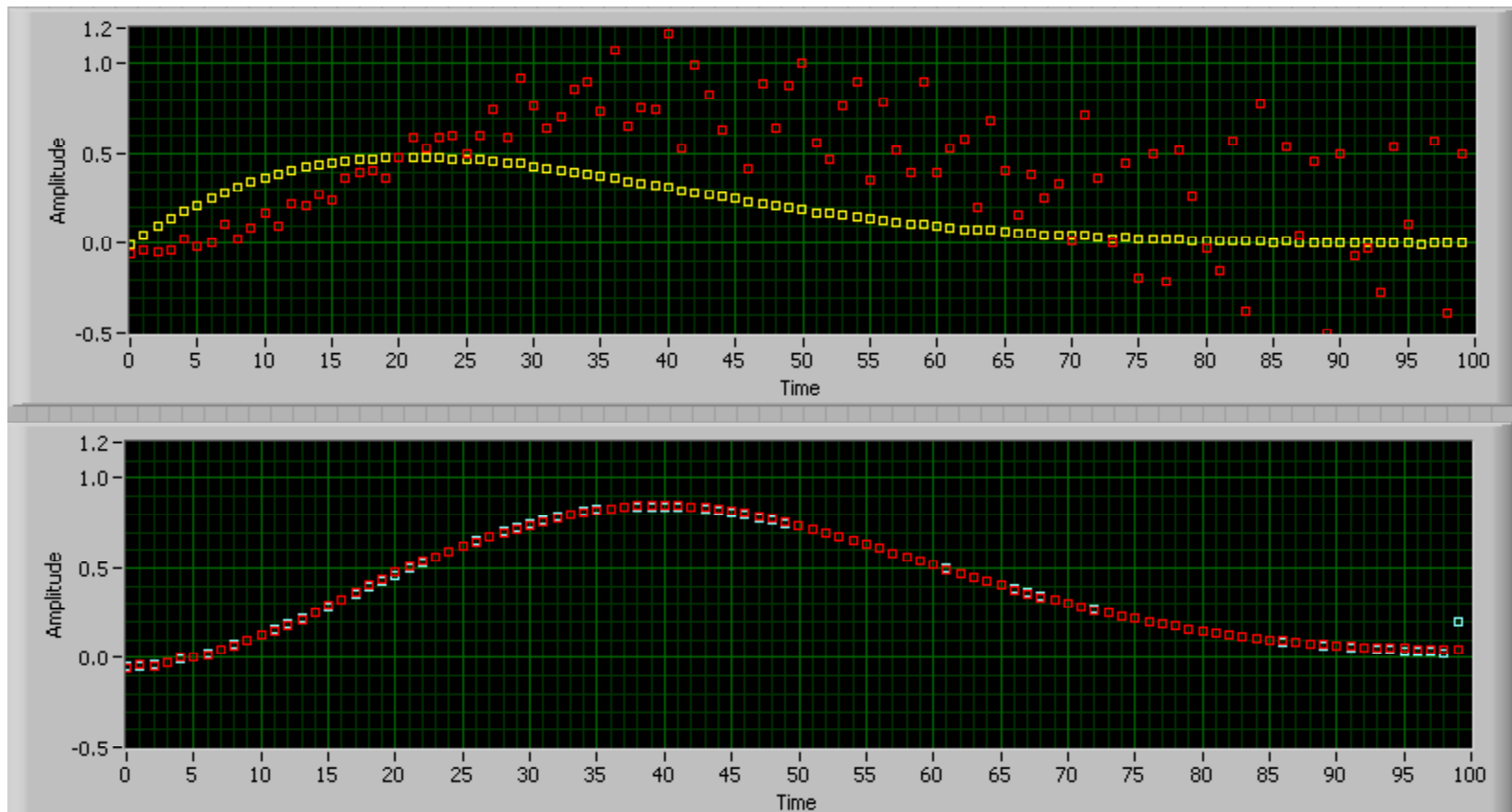
Ruído = $5.0e-3$ sem truncamento (ordem = 100)



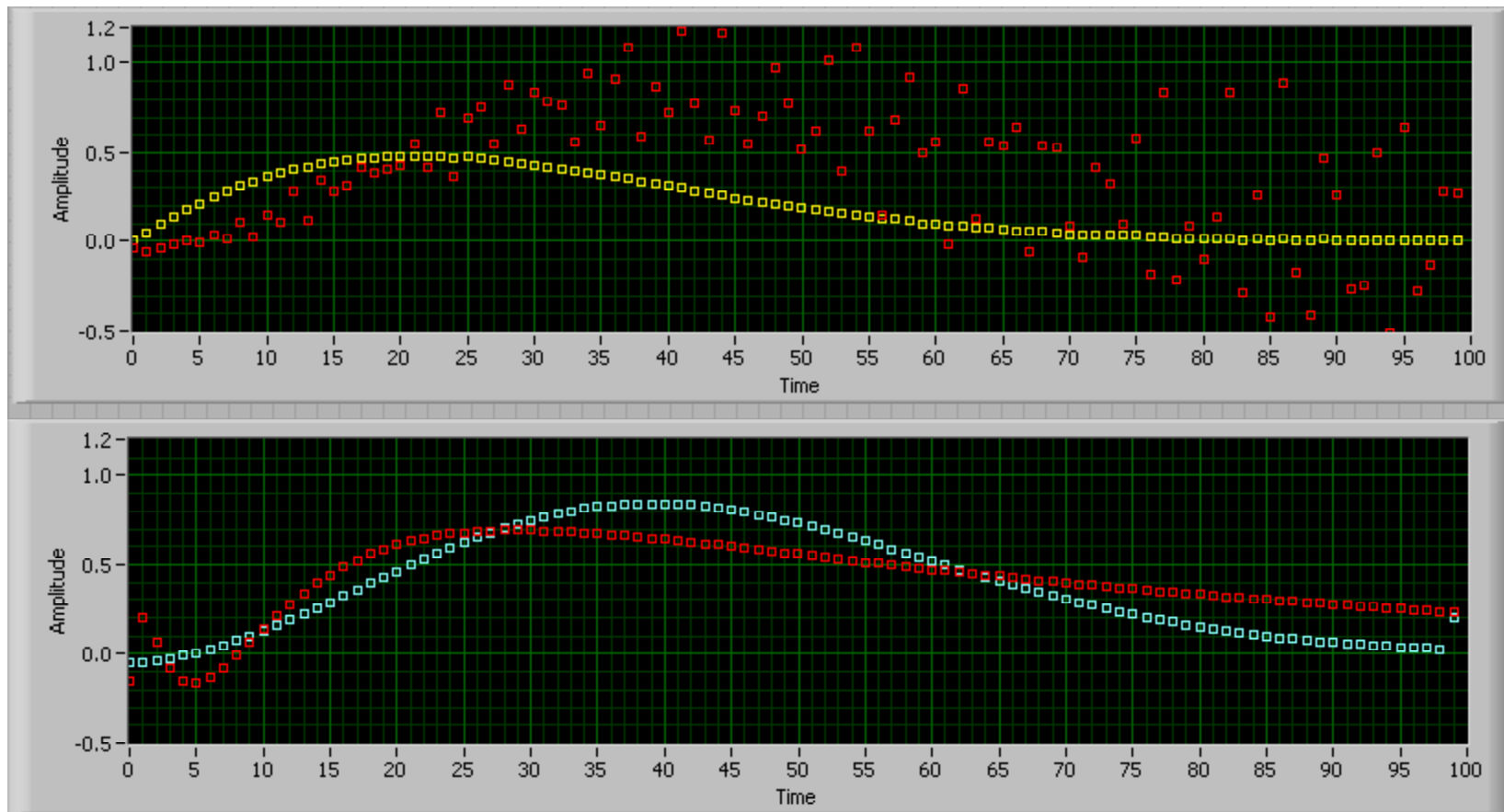
Ruído = $5.0e-3$, $\delta = 5.0e-2$ (ordem = 25)



Ruído = $5.0e-3$, $\delta = 1.0e-1$ (ordem = 14)



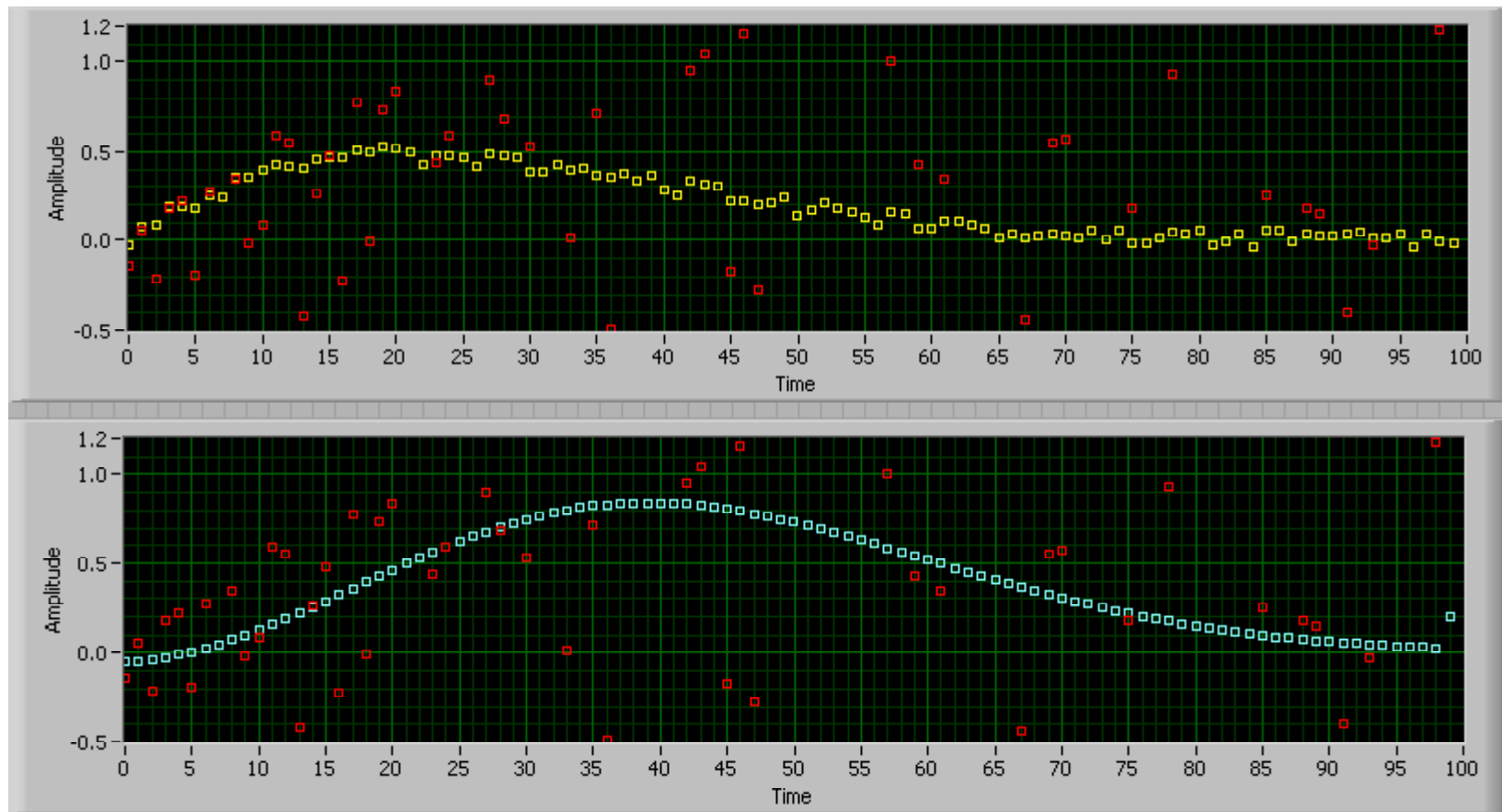
Ruído = $5.0e-3$, $\delta = 3.0e-1$ (ordem = 5)



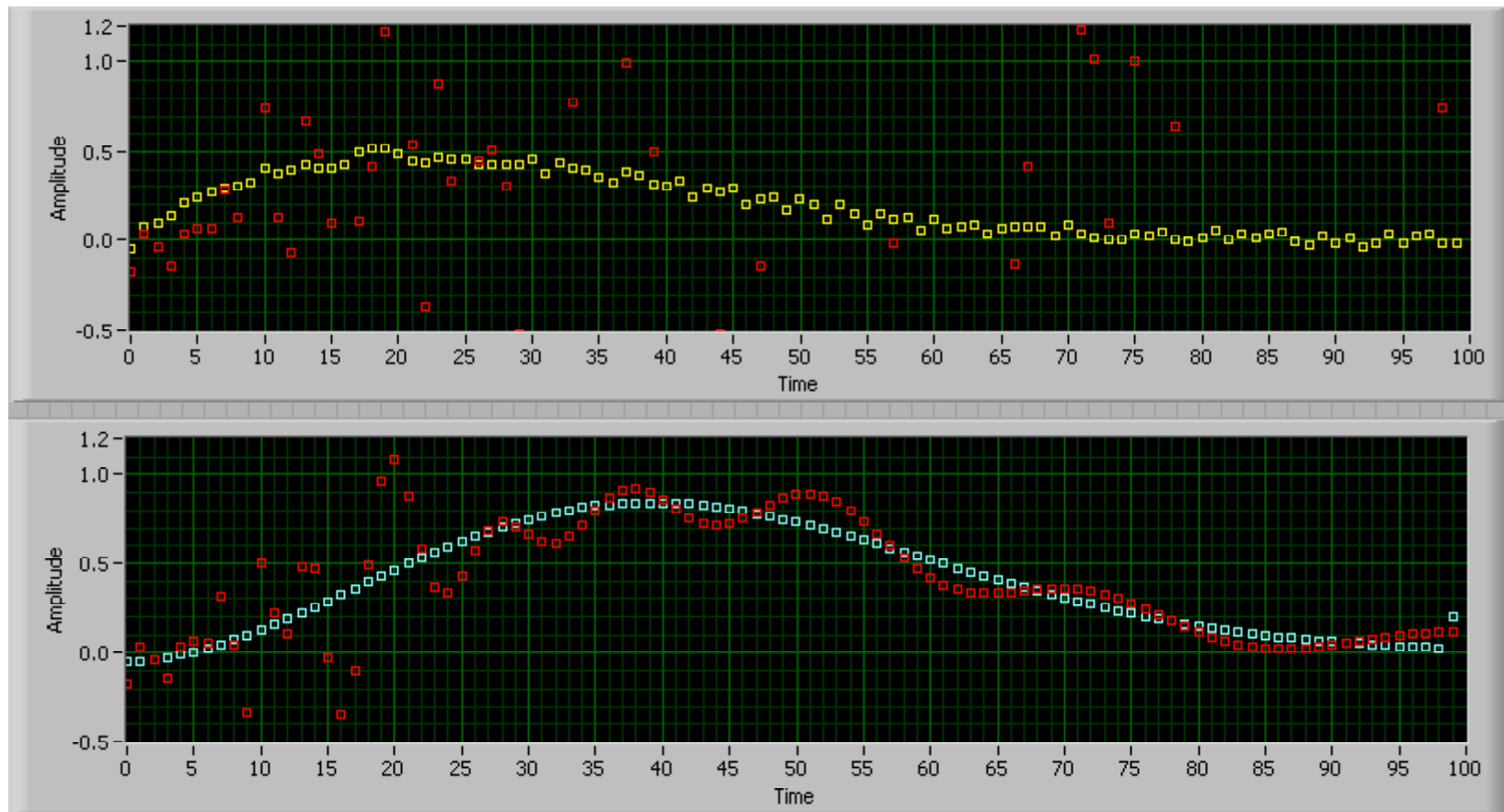
Solução de referência (ordem = 100)

Ruído = $5.0e-2$

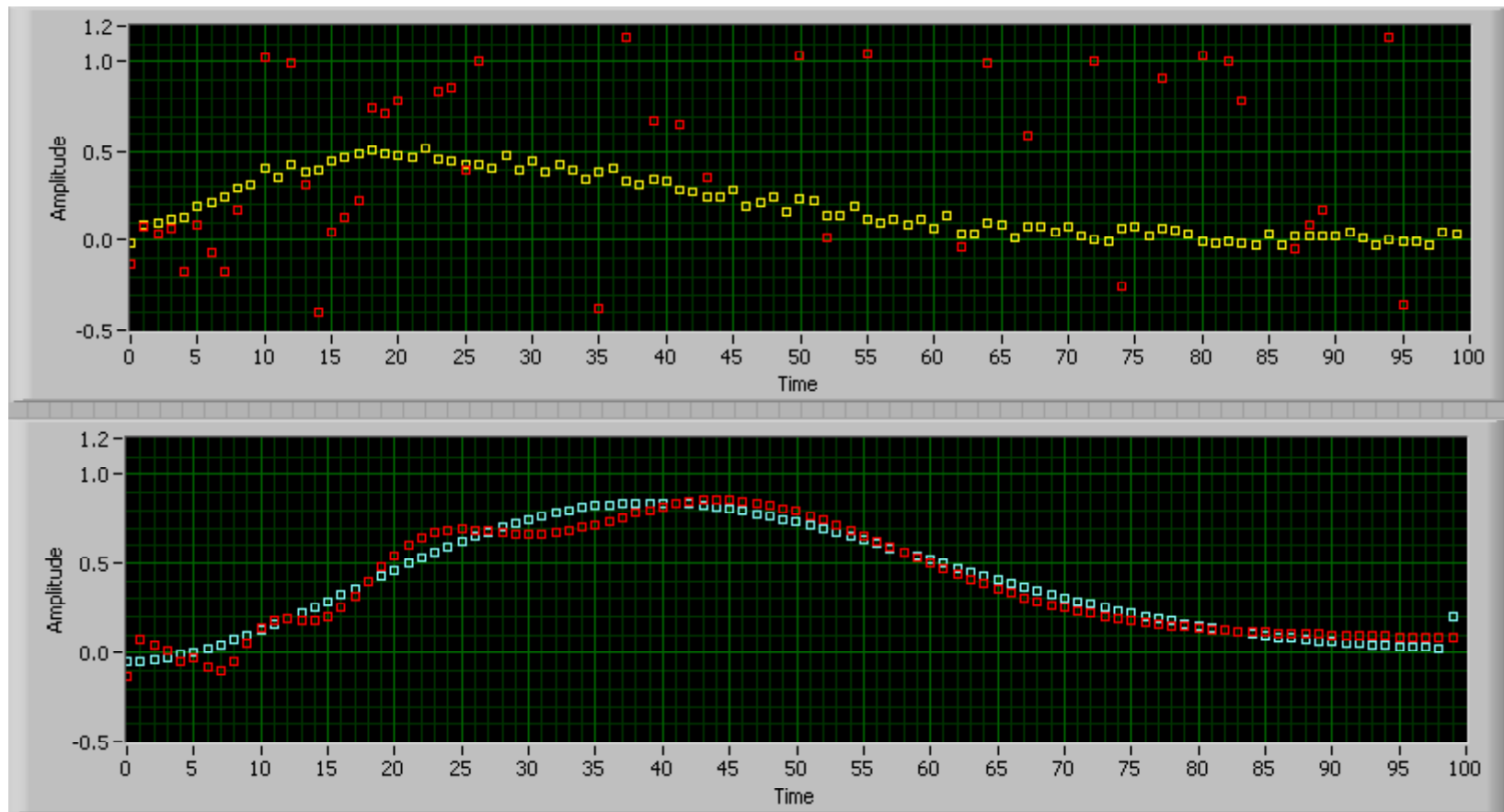
Ruído = $5.0e-2$ sem truncamento (ordem = 100)



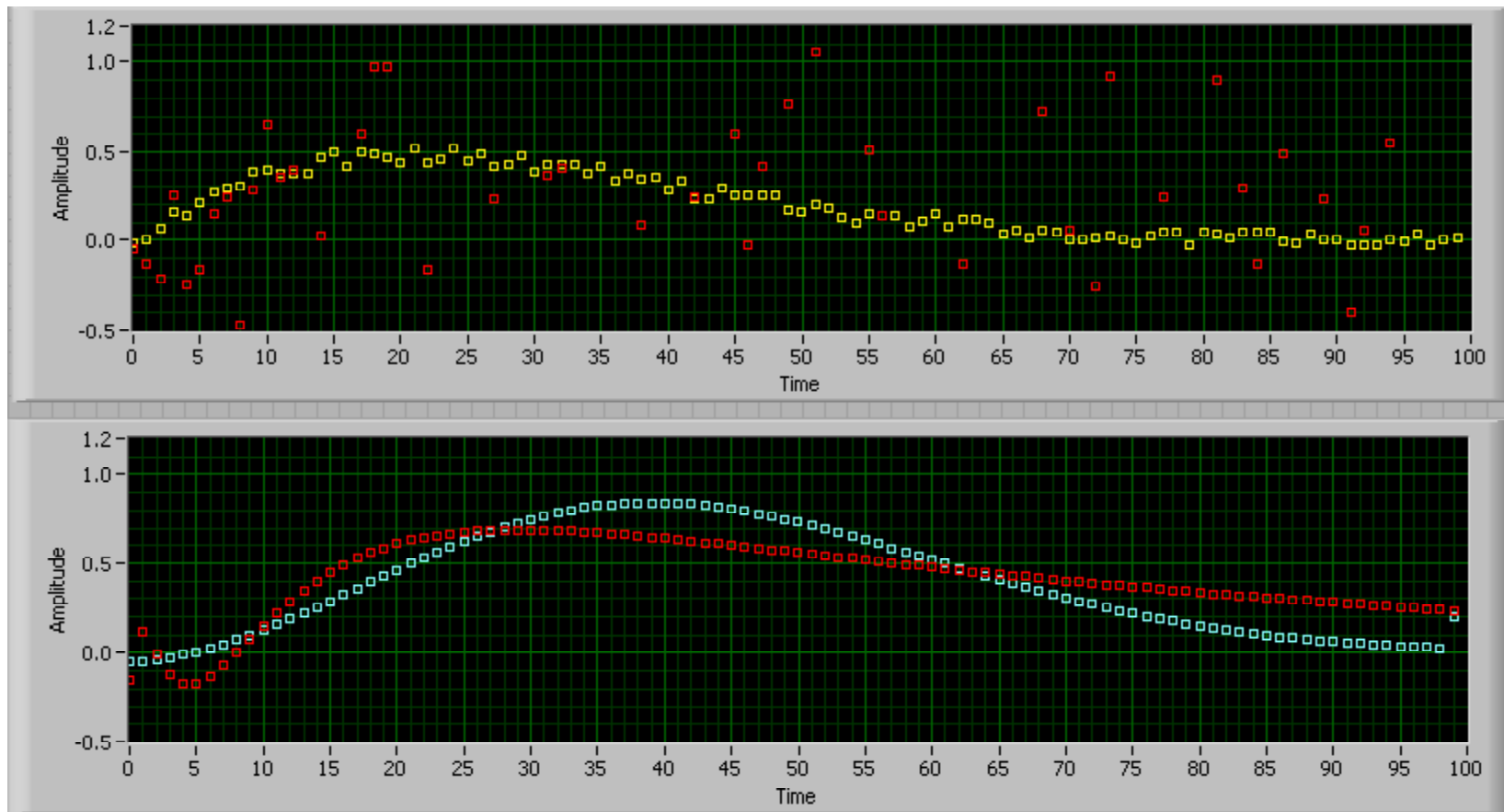
Ruído = $5.0e-2$, $\delta = 5.0e-2$ (ordem = 25)



Ruído = $5.0e-2$, $\delta = 1.0e-1$ (ordem = 14)



Ruído = $5.0e-2$, $\delta = 3.0e-1$ (ordem = 5)



Conclusões e perspectivas

1. A TSVD permite calcular uma direção "principal" de otimização associada às derivadas não nulas da hessinana
2. O custo computacional é alto mas a SVD pode ser paralelizada
3. Qual é o comportamento desse método em outras patologias, p.e. múltiplos mínimos ????
4. Quais são as patologias desse problema ???



OBRIGADO...