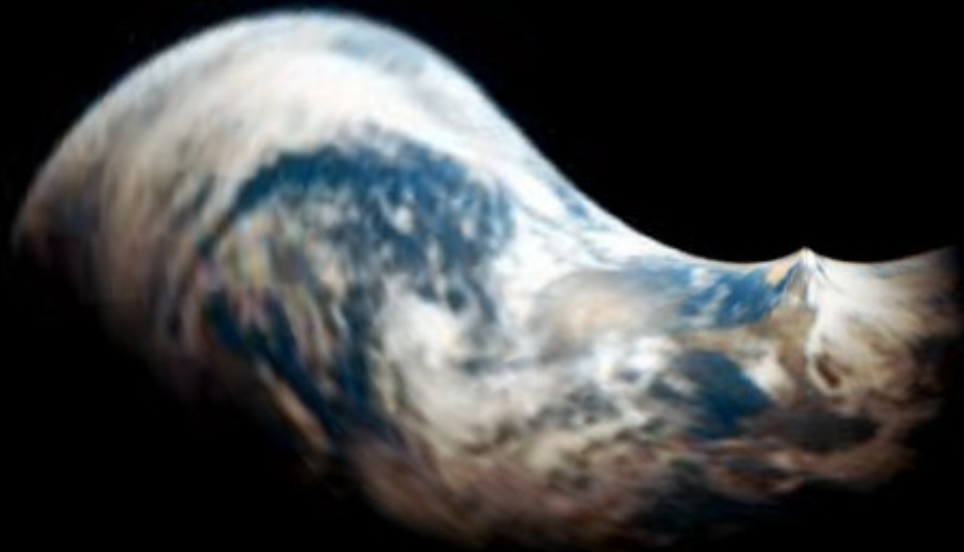


# Uso do conceito de sistemas dinâmicos e funções de Green na solução de problemas inversos

Priscila F. B. de Sousa, Solidônio R. Carvalho  
Gilmar Guimarães

# Introdução



# Apresentação

Introdução

Fundamentos

Resultados

Conclusões

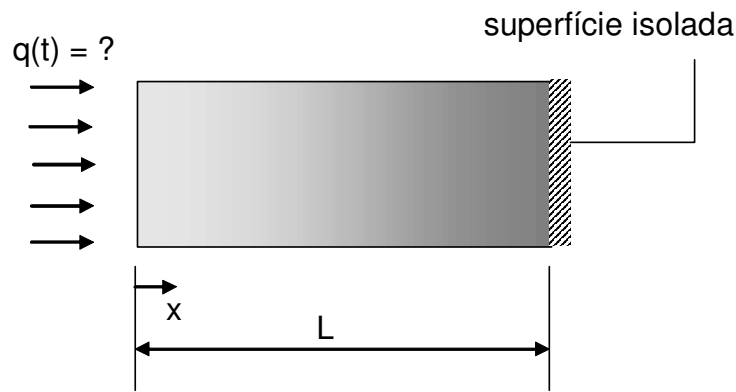
# Introdução

- Sistemas dinâmicos
- Técnicas baseadas em filtros

# Fundamentos

- ✎ A técnica proposta por Blum & Marquardt (1997) resolve IHCP propondo uma interpretação diferente no domínio da frequência.
- ✎ Implementação simples e a possibilidade 2D e 3D.
- A técnica ➡ duas etapas distintas:
  - 1 - obtenção da função transferência do modelo,  $G_H$ ;
  - 2- obtenção dos estimadores  $G_Q$  e  $G_N$  e implementação do algoritmo.

# Fundamentos: modelo matemático



Equação de difusão:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, t > 0$$

Condições de contorno:

$$-k \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = q(t) = ? \quad t > 0$$

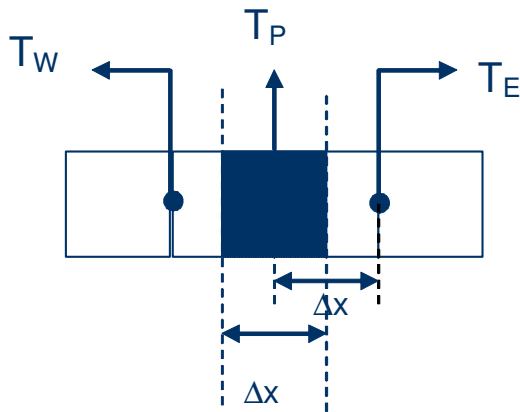
$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad t > 0$$

Condição inicial:

$$\theta(x, 0) = \theta_0 \quad 0 \leq x \leq L$$

# Fundamentos: solução do problema inverso

- Solução do problema inverso através da aplicação da transformada de Laplace na equação discretizada apenas no espaço.



$$\rightarrow (T_w - T_p) + (T_e - T_p) = \frac{\Delta x^2}{\alpha} \frac{\partial T_p}{\partial t}$$

↓ Aplicando Laplace

$$\bar{T}_w + \bar{T}_e - \left( 2 + \frac{\Delta x^2 s}{\alpha} \right) \bar{T}_p = 0$$

# Fundamentos: solução do problema inverso

- Se ainda a mesma discretização espacial uniforme for aplicada às condições de contorno,

$$\begin{bmatrix}
 \left(1 + \frac{\Delta x^2}{2\alpha} s\right) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & -1 & \left(2 + \frac{\Delta x^2}{\alpha} s\right) & -1 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & -1 & \left(1 + \frac{\Delta x^2}{2\alpha} s\right) & \dots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \bar{T}_1 \\
 \bar{T}_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \bar{T}_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \frac{\bar{q}(s)dx}{k}
 \end{bmatrix}$$



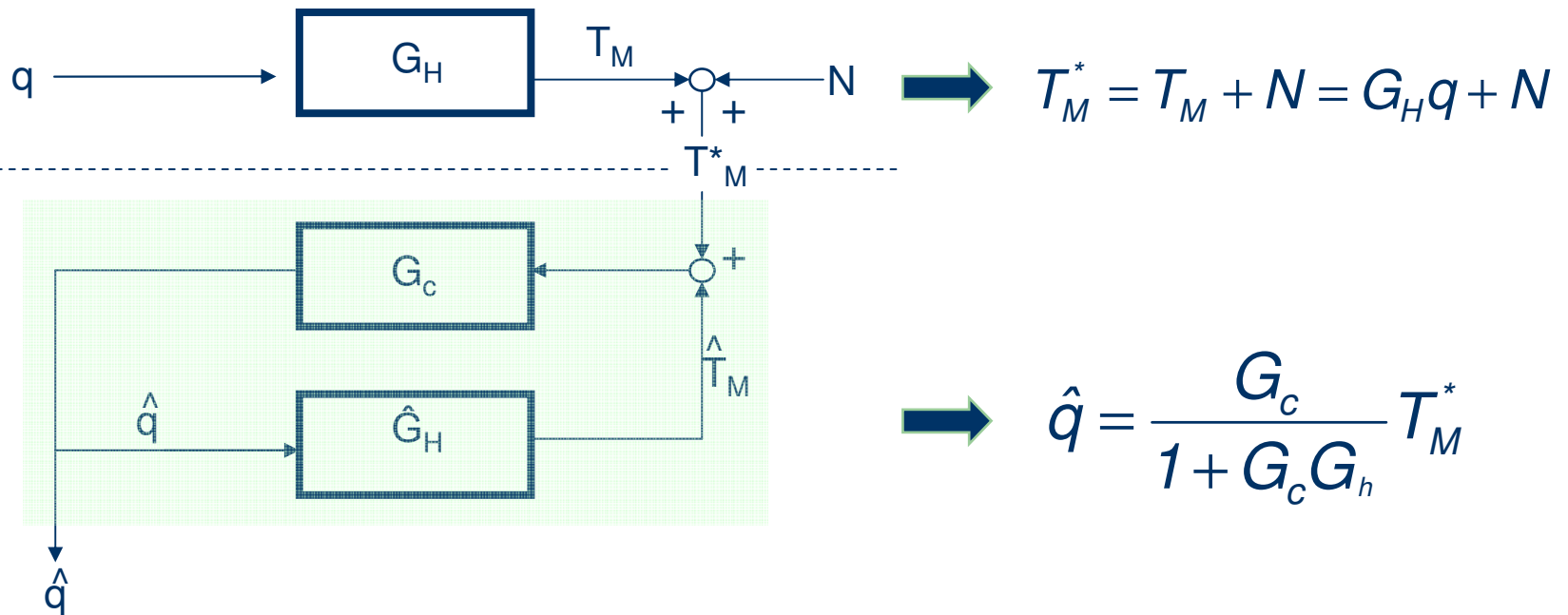
# Fundamentos: solução do problema inverso

- Resolvendo o conjunto de equações expresso matricialmente, têm-se:

$$\frac{T(x,s)}{Q(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{mh} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{nh} a_i s^i} = G_H(x,s)$$

- onde,  $G_H$  é a função transferência do sistema e pode ser obtida para qualquer nó.

# Fundamentos: observador



# Fundamentos: observador

$$\hat{q} = \frac{G_c G_H}{1 + G_c G_H} q + \frac{G_c}{1 + G_c G_H} N$$

$\xleftrightarrow{G_Q}$                        $\xleftrightarrow{G_N}$

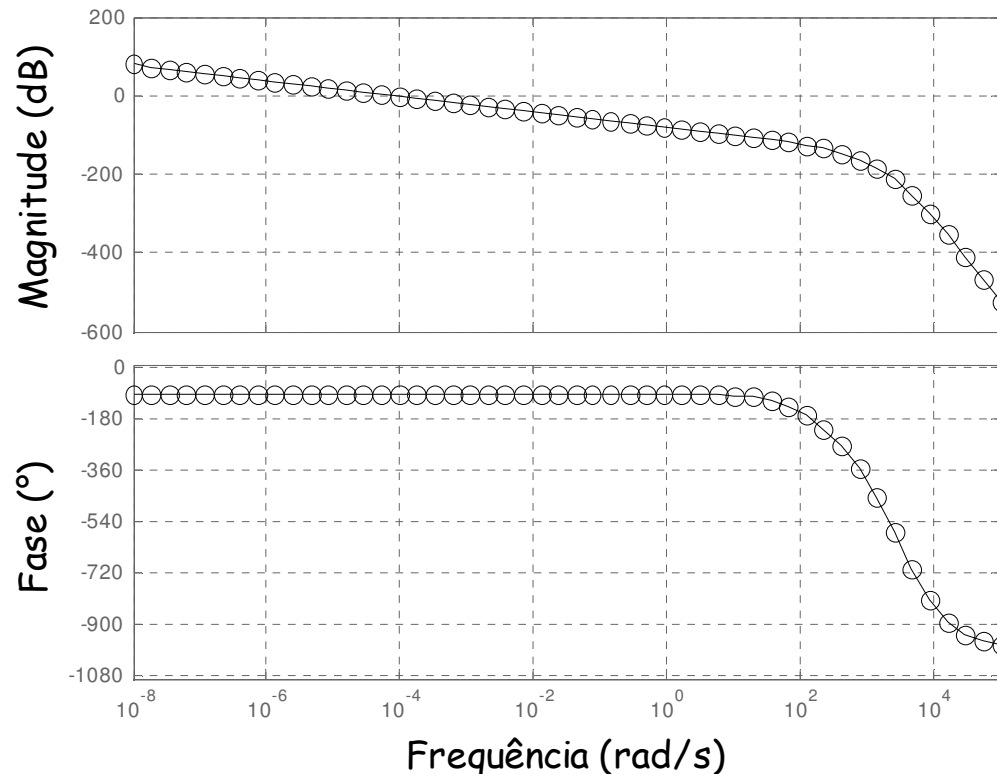
A equação estabelece uma relação entre o fluxo de calor estimado com o fluxo de calor real e o ruído.

Da equação acima observa-se:  $G_N = G_Q G_h^{-1}$  ou  $|G_N| = \frac{|G_Q|}{|G_h|}$

Ainda da equação, conclui-se:  $G_Q \rightarrow 1$  e  $G_N \rightarrow 0$

# Fundamentos: observador

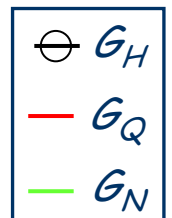
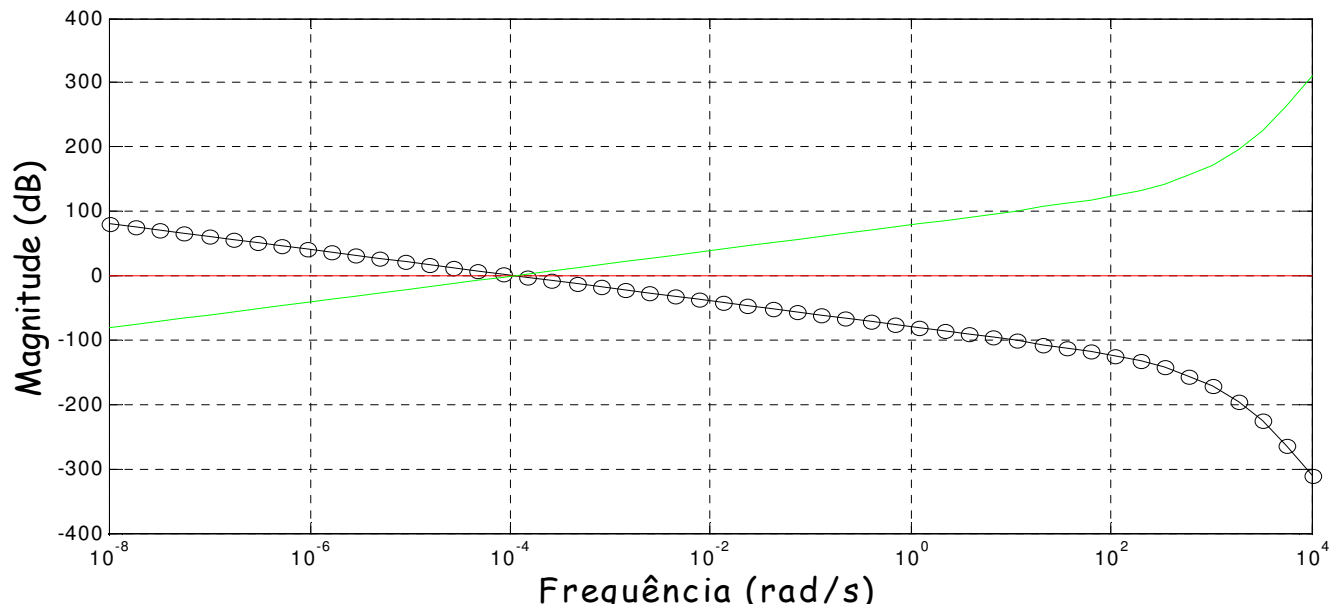
- Função transferência que descreve o condutor ( $G_H$ ) é conhecida:



# Fundamentos: observador

- Como,  $G_Q \rightarrow 1$  e  $G_N \rightarrow 0$ , o ruído pode ser amplificado dependendo da escolha de  $G_Q$ :

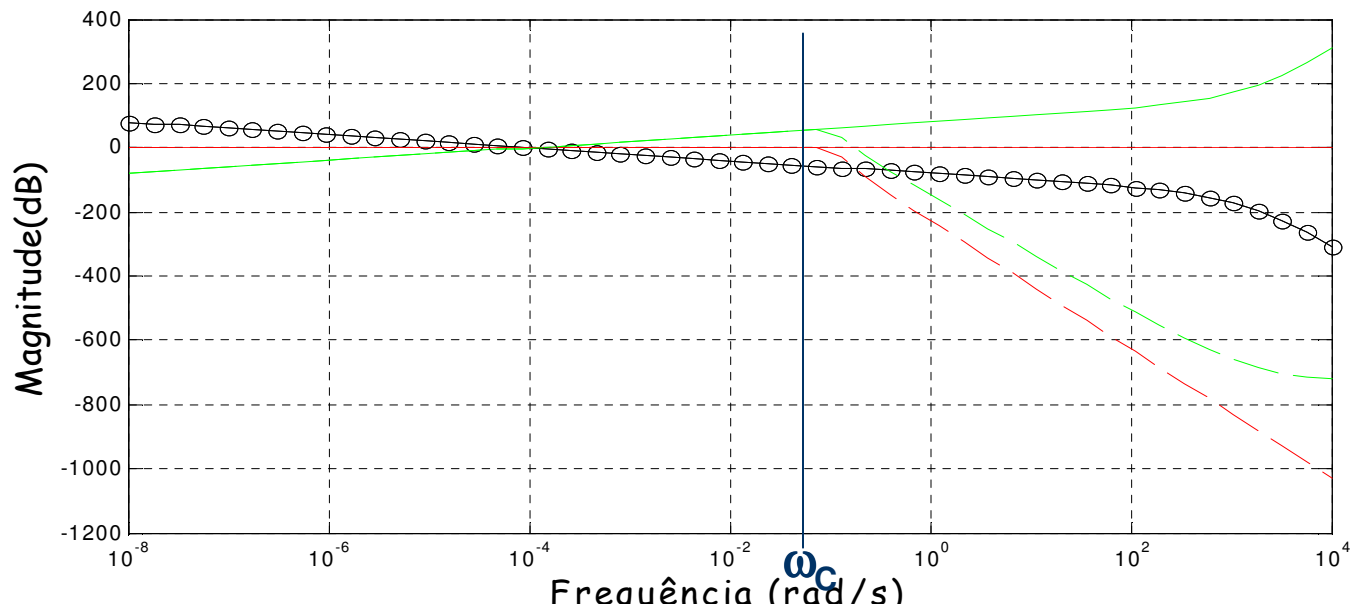
$$1 - |G_Q| = 1, |G_N(j\omega)| = |G_H(j\omega)|^{-1}$$



# Fundamentos: observador

2- Estabelece-se uma  $\omega_c$  de tal modo que  $|G_Q| \rightarrow 0$ .

$|G_N| \rightarrow 0 \Leftrightarrow |G_Q| \rightarrow 0$ , mais rápido que  $|G_H| \rightarrow 0$ .



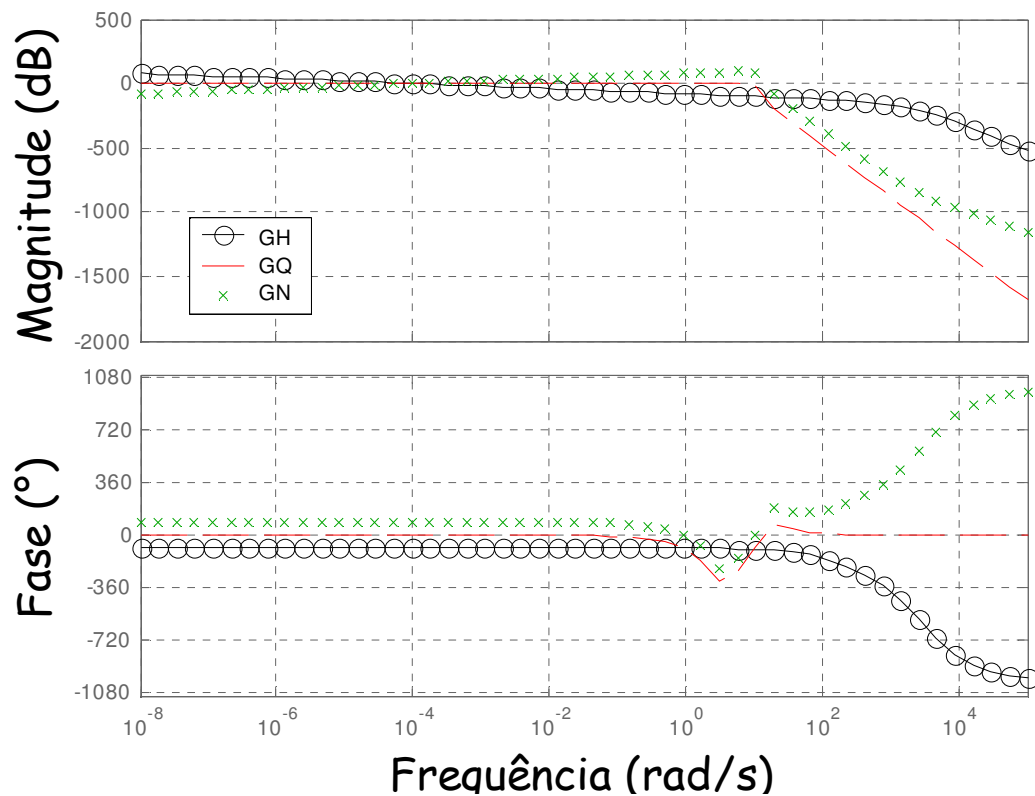
# Fundamentos: filtro

- i) Comportamento passa-baixo;
- ii) Curva monotônica;
- iii) Queda no sinal mais acentuada possível a partir da frequência de corte.

Escolha: Chebychev tipo 1.

$$G_Q(s) = \frac{k_{Cheb}}{(s - s_{Cheb,1})(s - s_{Cheb,2}) \cdots (s - s_{Cheb,nQ})}$$

# Fundamentos: funções transferência





# Fundamentos: observações

- Quanto mais rápida for a atenuação de  $|G_Q|$  além de  $\omega_c$ , menor a sensibilidade do algoritmo a ruídos.

$$\hat{Q}(s) = G_N(s)T_M^*(s)$$

- Como o observador é um esquema on-line, isso acarreta uma mudança ou atraso de fase.
- Uma filtragem dos dados remove o atraso e permite estabilidade ao algoritmo.

# Fundamentos: algoritmo

- Com o filtro escolhido, obtém-se  $G_N$ : 

$$G_N(s) = \frac{G_Q(s)}{G_h(s)} = \frac{\hat{Q}(s)}{T_M^*(s)} \xrightarrow{\text{em "z"}} G_N = \frac{\sum_{i=0}^{m_n} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n_n} a_i z^{-i}}$$

- No domínio do tempo:

$$\hat{q}(k) = \sum_{i=0}^{m_n} b_i T_M^*(k-i) - \sum_{i=1}^{n_n} a_i \hat{q}(k-i)$$

# Fundamentos: algoritmo

- Se o problema inverso for resolvido off-line, o atraso de fase pode ser removido, adaptando uma filtragem reversa:

$$f_k \rightarrow F(z) \text{ e } f_{-k} \rightarrow \bar{F}(z)$$

$$1^\circ \text{ passo : } Q_F(z) = G_N(z)T_M^*;$$

$$2^\circ \text{ passo : } Q_B(z) = G_Q(z)\bar{Q}_F(z);$$

$$3^\circ \text{ passo : } \hat{Q}(z) = \bar{Q}(z).$$

# Fundamentos: algoritmo

- Obtendo a equação diferença para o segundo passo, no tempo, temos:

$$\hat{q}^*(k) = \sum_{i=0}^{m_n} b_i \hat{q}(k-i) - \sum_{i=1}^{n_n} a_i \hat{q}^*(k-i)$$

- Os passos a seguir descrevem o funcionamento do algoritmo.

# Fundamentos: algoritmo

- Obter  $G_H(s)$ ;
- Obter  $G_Q(s)$  e converter  $G_Q(s)$  para sua representação discreta no tempo;

$$\hat{q}^*(k) = \sum_{i=0}^{m_n} b_i \hat{q}(k-i) - \sum_{i=1}^{n_n} a_i \hat{q}^*(k-i) \quad (I)$$


- Obter  $G_M(s)$  e converter para sua representação discreta no tempo;

$$\hat{q}(k) = \sum_{i=0}^{m_n} b_i T_M^*(k-i) - \sum_{i=1}^{n_n} a_i \hat{q}(k-i) \quad (II)$$

- Dado  $T_{M,k}^*=(k=1,2,\dots,n)$ :
  - 1- Filtra usando a Eq (II);
  - 2- Inverte a seqüência filtrada no tempo ( $k=n,\dots,2,1$ );
  - 3- Filtra a seqüência inversa usando a Eq (I);
  - 4- Inverte o sinal filtrado no tempo ( $k=1,2,\dots,n$ ).

A seqüência resultante  $\hat{q}_k=(k=1,2,\dots,n)$ , é a fluxo de calor estimado.

## Fundamentos: $G_h$ por funções de Green

- Assumindo o problema unidimensional. 
- A solução: em termos de funções de Green:

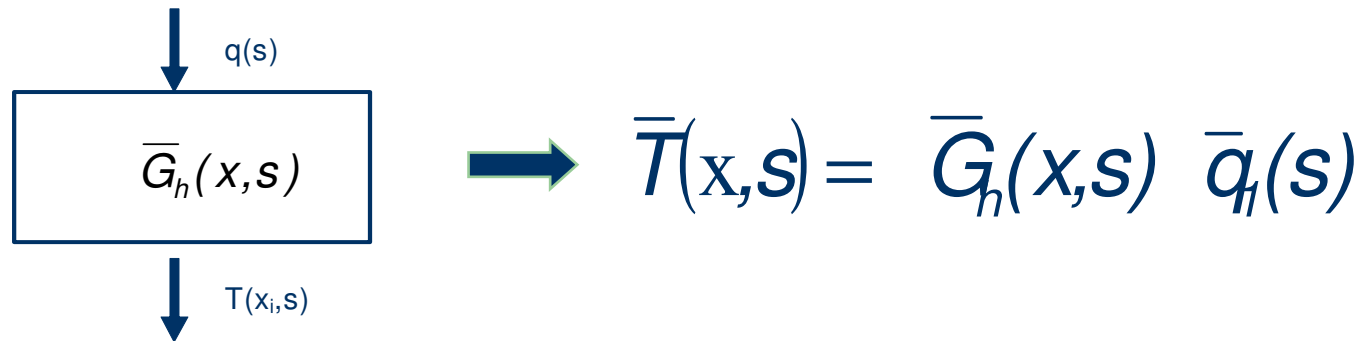
$$T(x,t) = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \left[ G_h(x, t/x', \tau) \Big|_{x'=0} q_1(\tau) \right] d\tau$$

# Fundamentos: $G_h$ por funções de Green

- Aplicando convolução:

$$T(x,t) = G_h(x,t) * q_1(\tau)$$

Representando o modelo térmico 1D por um sistema dinâmico do tipo entrada/ saída e aplicando Laplace

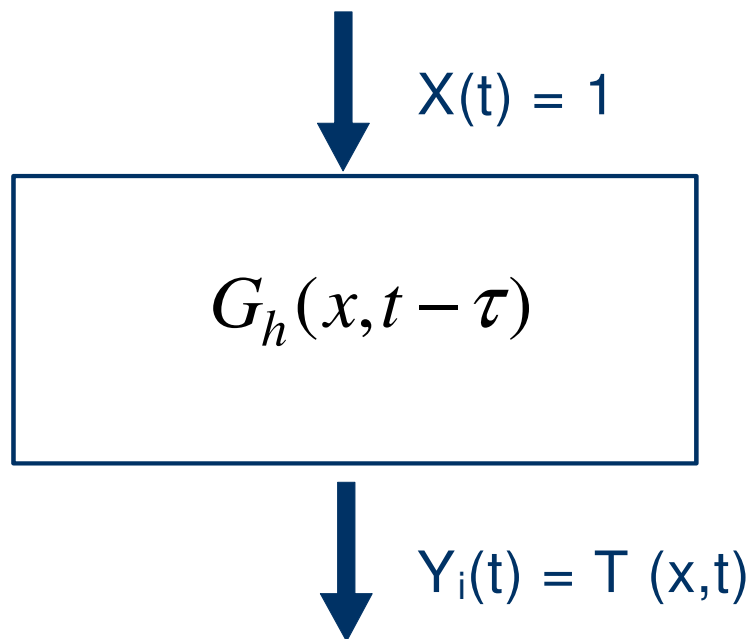


## Fundamentos: $G_h$ por funções de Green

- Obtenção de  $G_h \rightarrow$  problema auxiliar.
  1. Mesmas características físicas;
  2. Sinal de entrada unitário;
  3. Temperatura inicial zero.



# Fundamentos: $G_h$ por funções de Green



Análogo à solução do problema térmico original, obtém-se a solução do problema térmico auxiliar

$$T^+(x, t) = G_h(x, t - \tau) * 1$$

## Fundamentos: $G_h$ por funções de Green


- Aplicando Laplace nos dois lados da equação:

$$\bar{T}^+(x, s) = \bar{G}_h(x, s) \frac{1}{s}$$

- Como o sistema dinâmico equivalente é linear, invariante e fisicamente realizável a função resposta é a mesma qualquer que seja o conjunto entrada/saída.

$$\bar{G}_h(x, s) = s \bar{T}^+(x, s)$$

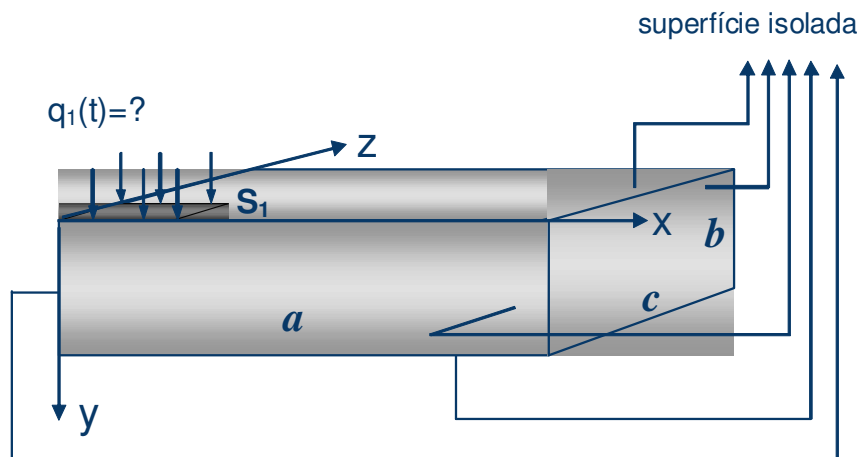
## Fundamentos: $G_h$ por funções de Green

- Obtenção numérica da solução do problema  $T^+(r_i, t)$  
- Obtenção do ajuste polinomial de  $T^+(r_i, t)$  em um intervalo de amostragem  $[a, ta]$ .
- Obtenção de  $T^+(r_i, s)$ , transformada de Laplace do ajuste polinomial de  $T^+(r_i, t)$ .
- Obtenção de,  $\bar{G}_h(r_i, s) \longrightarrow \bar{G}_h(r_i, s) = s \bar{T}^+(r_i, s)$



# Fundamentos: $G_h$ por funções de Green

- Problema 3D.



**Equação de difusão**

$$\nabla T(r, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

**Condições de contorno**

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = q_1(t) \text{ em } S_1$$

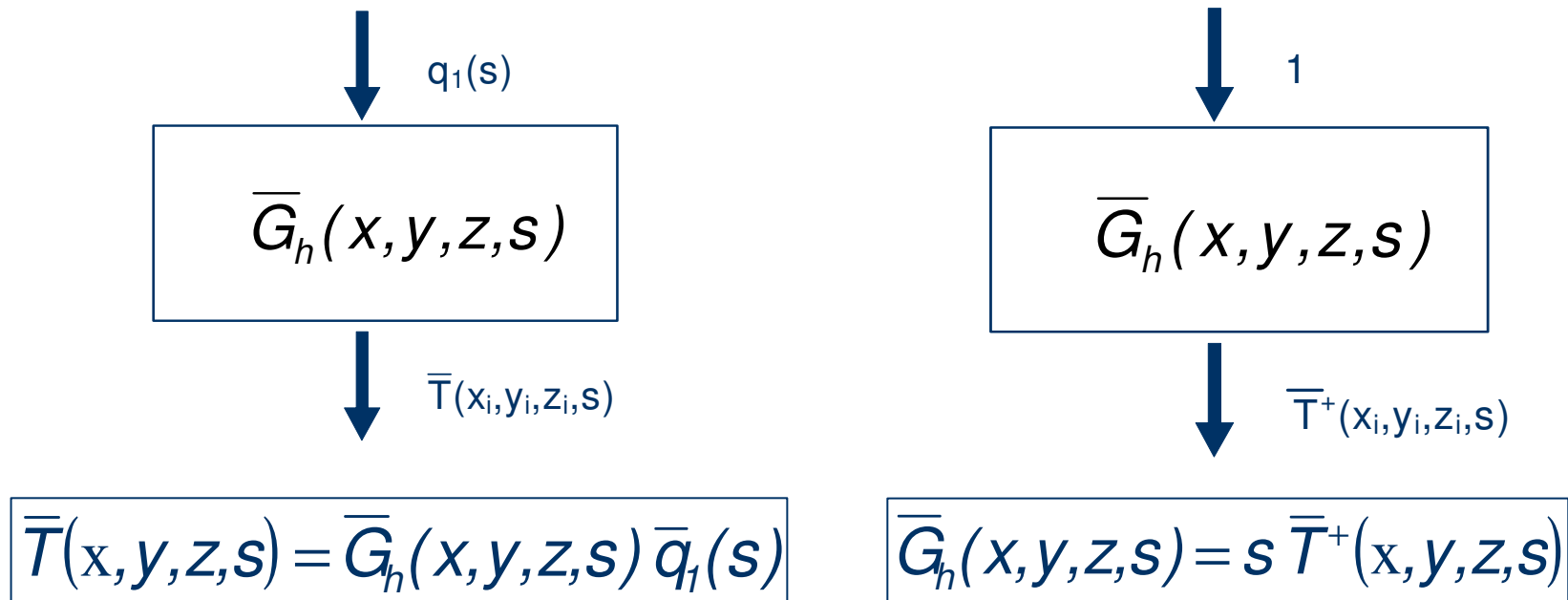
$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r(x=0; x=a; y=0; y=b; z=0; z=b)} = 0$$

**Condição inicial**

$$T(x, y, z, 0) = T_0$$

# Fundamentos: $G_h$ por funções de Green

- Análogo a solução do problema 1D:



## Fundamentos: $G_h$ por funções de Green

- 1ª etapa → Obter a função transferência do condutor em estudo  $G_h$ .
- 2ª etapa → Obtenção das funções de transferência do sinal e do ruído e implementação do algoritmo. ■



**Resultados**

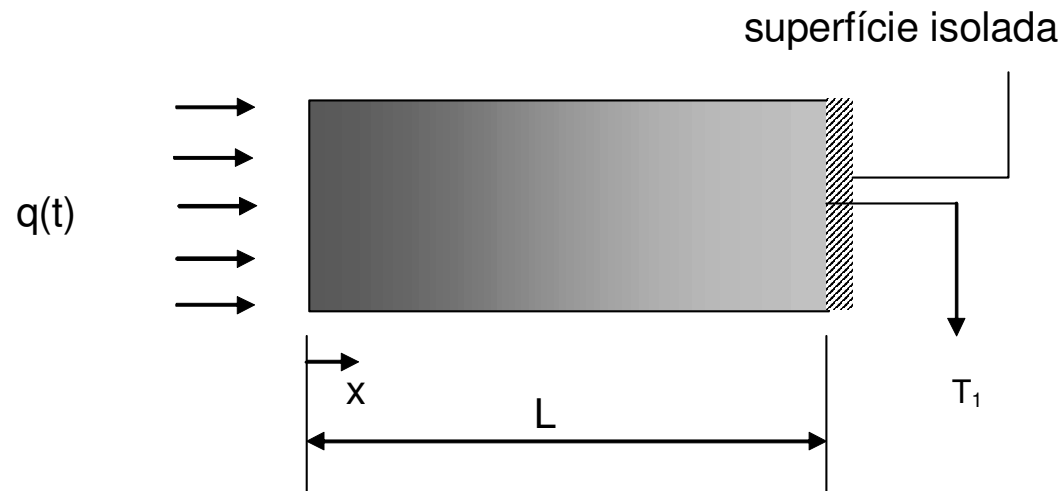
# Resultados Simulados





# Resultados: comparação entre $G_{HS}$

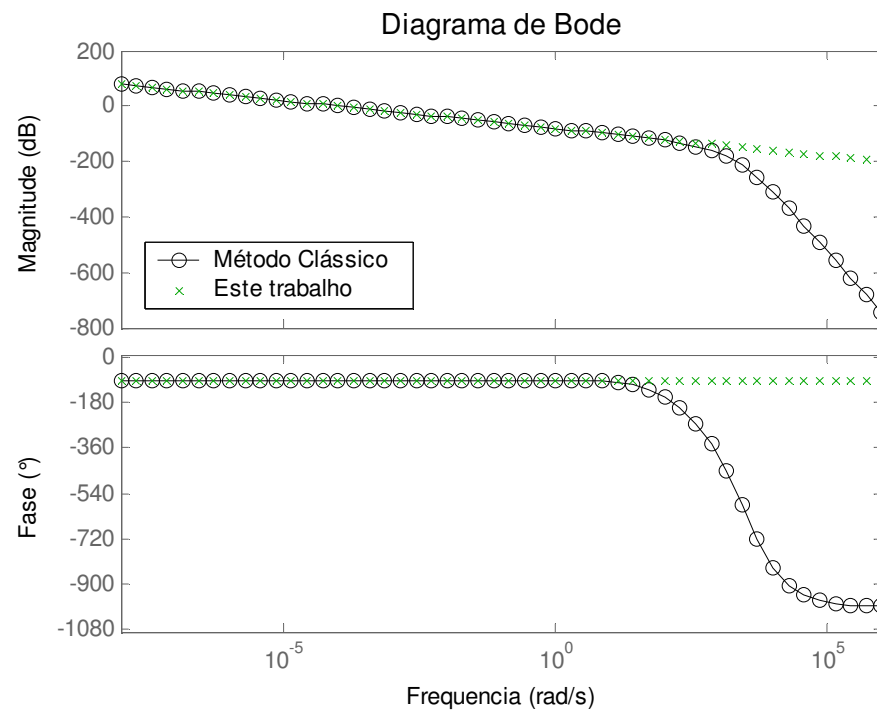
- Amostra simulada.



$L = 3\text{mm};$   
 $K = 401\text{W/mK};$   
 $\alpha = 117 \cdot 10^{-06}\text{m}^2/\text{s}.$

# Resultados: comparação entre $G_{HS}$

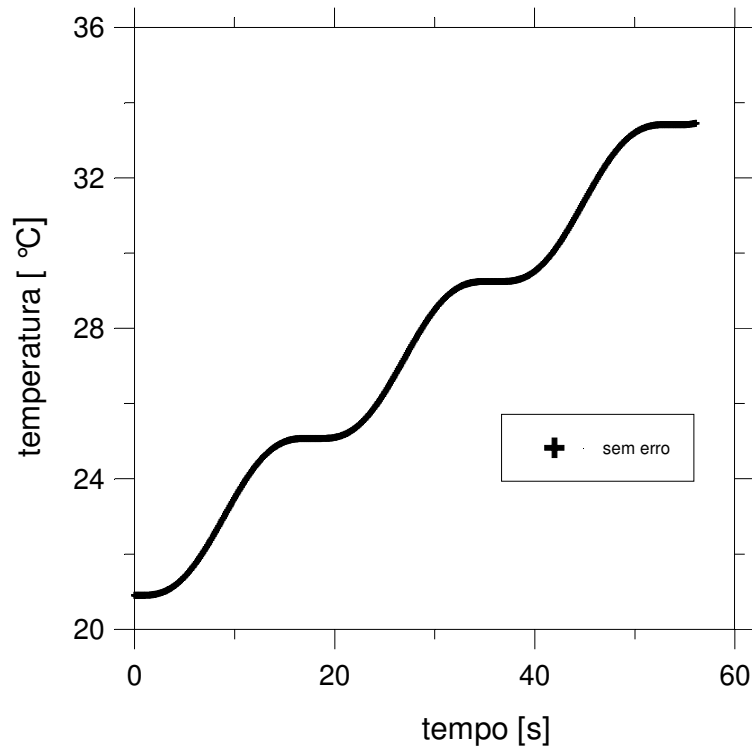
- Comparações entre  $G_{HS}$ , caso simulado 1D.



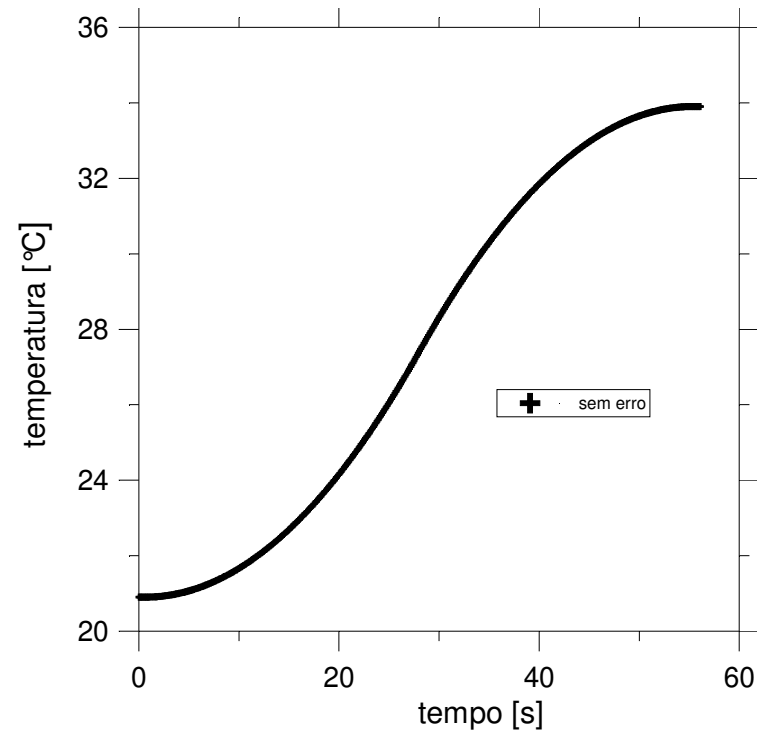
# Resultados: comparação entre $G_{HS}$

- Temperaturas simuladas sem erro(Inv3D).

- Fluxo senoidal



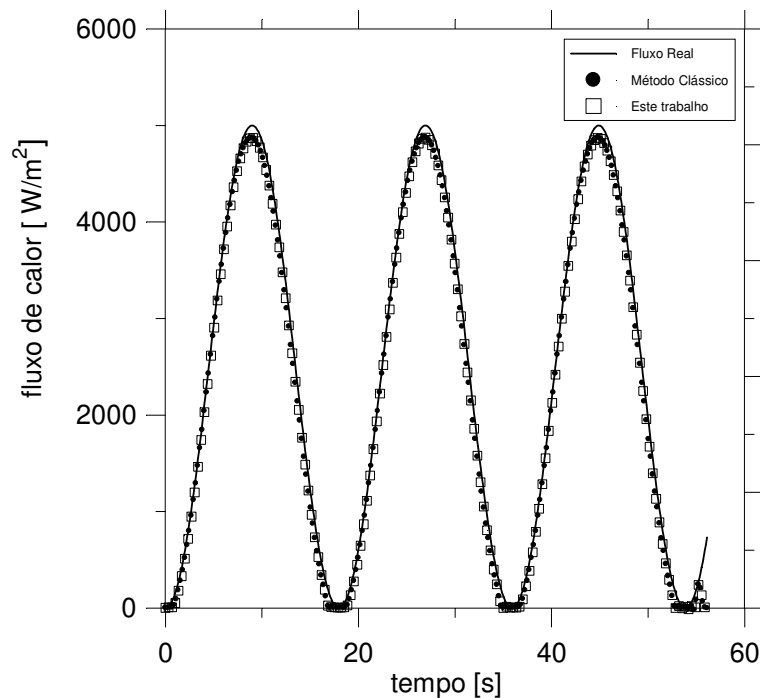
- Fluxo triangular



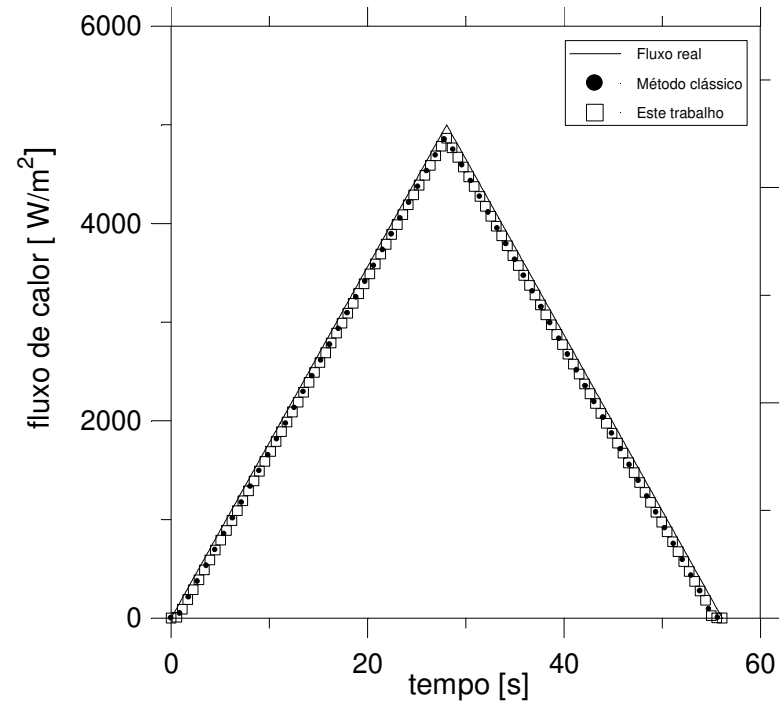
# Resultados: comparação entre $G_{HS}$

- Fluxos estimados usando a técnica de observadores com as diferentes funções de transferência.

- Fluxo senoidal

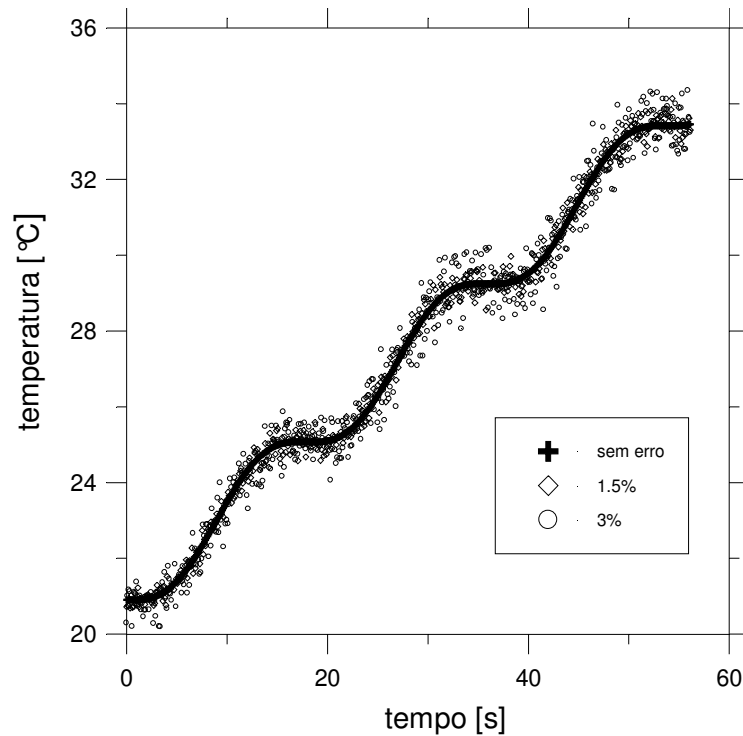


- Fluxo triangular

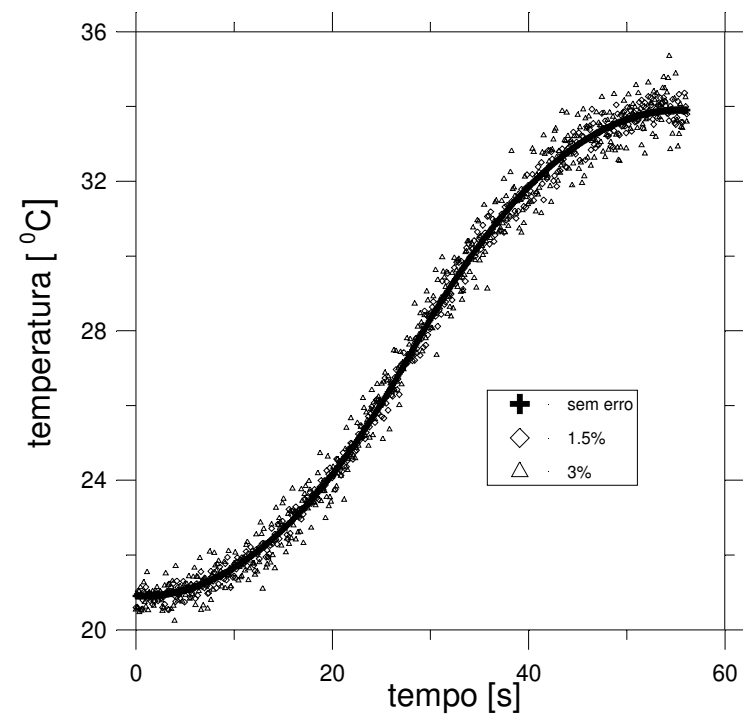


# Resultados: estimativas caso 1D

- Temperaturas "medidas" com e sem erro (Inv3D).
- Fluxo senoidal

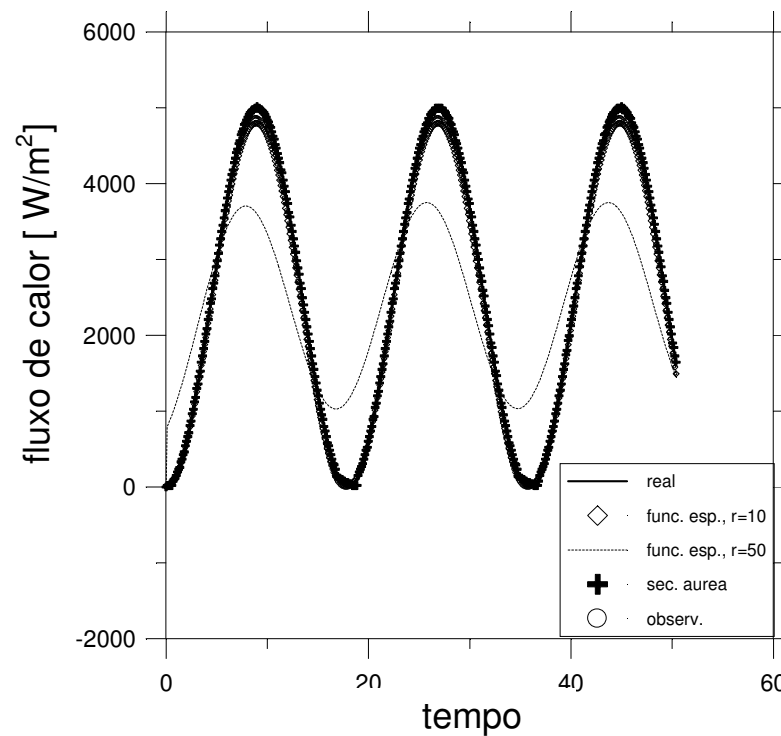


- Fluxo triangular



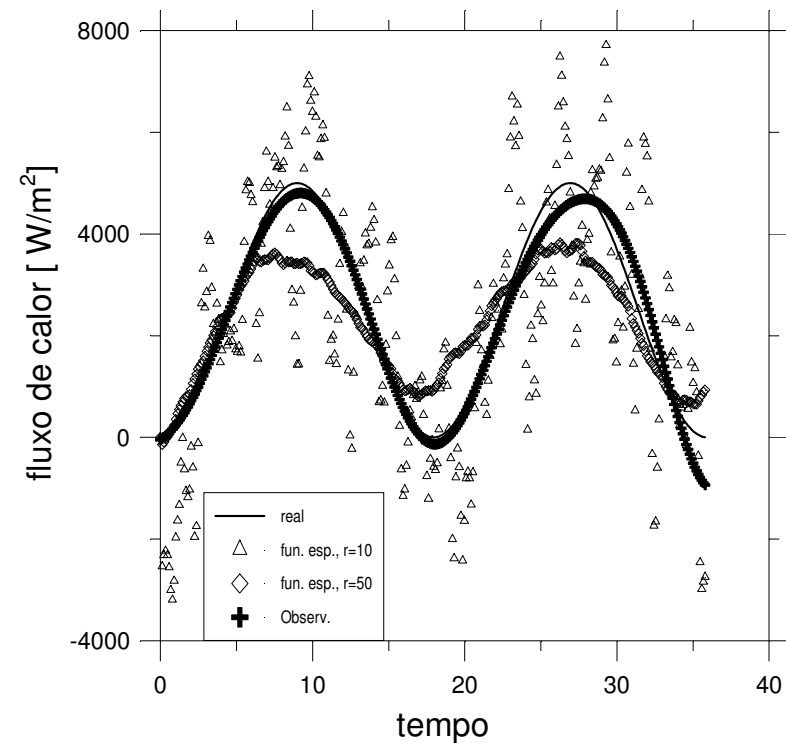
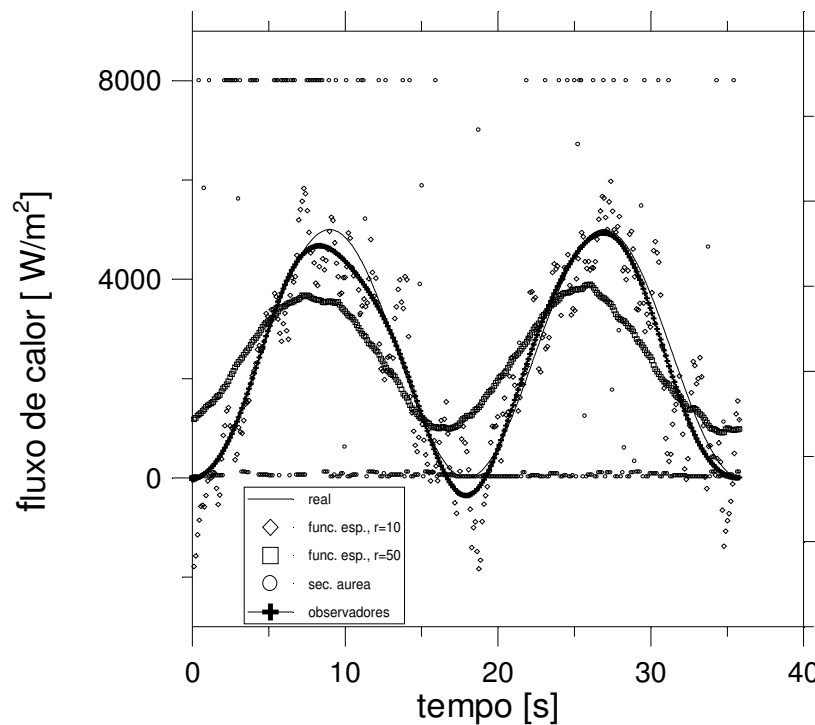
# Resultados: estimativas caso 1D

- Fluxos estimados a partir de dados de temperatura simulados sem ruído.



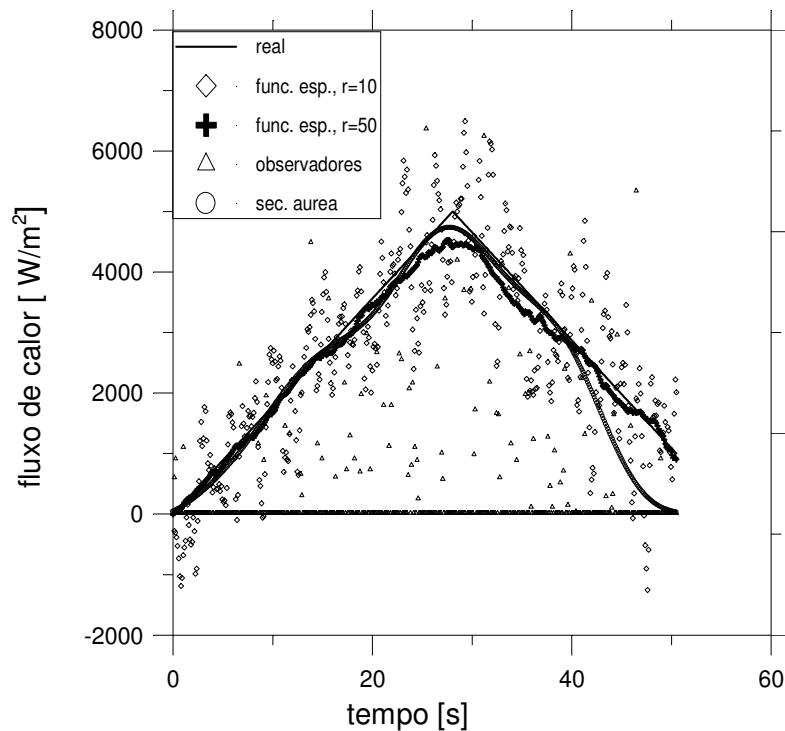
# Resultados: estimativas caso 1D

- Fluxos estimados a partir de dados de temperatura corrompidos por ruído de 1.5%.
- Fluxos estimados a partir de dados de temperatura corrompidos por ruído de 3%.

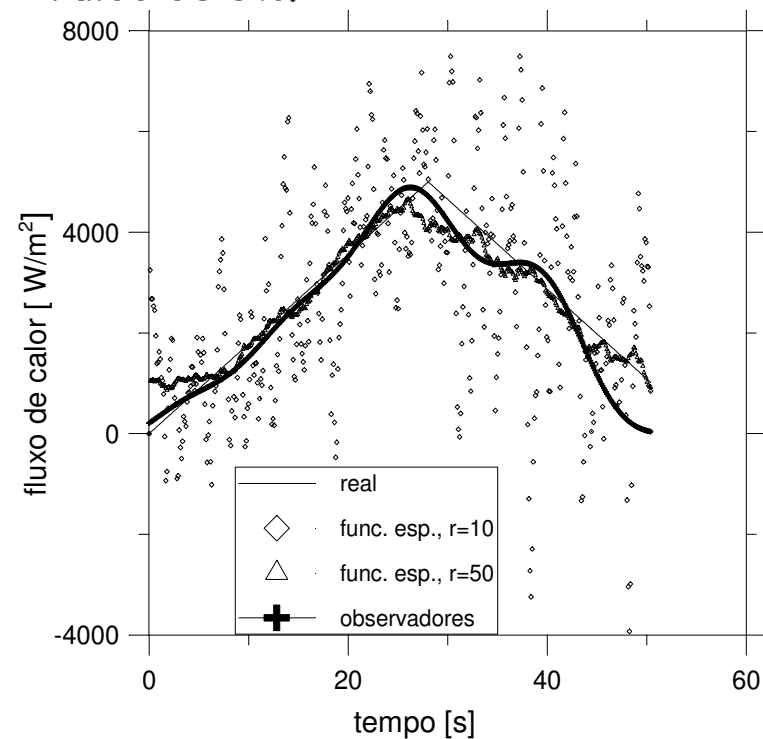


# Resultados: estimativas caso 1D

- Fluxos estimados a partir de dados de temperatura corrompidos por ruído de 1.5%.



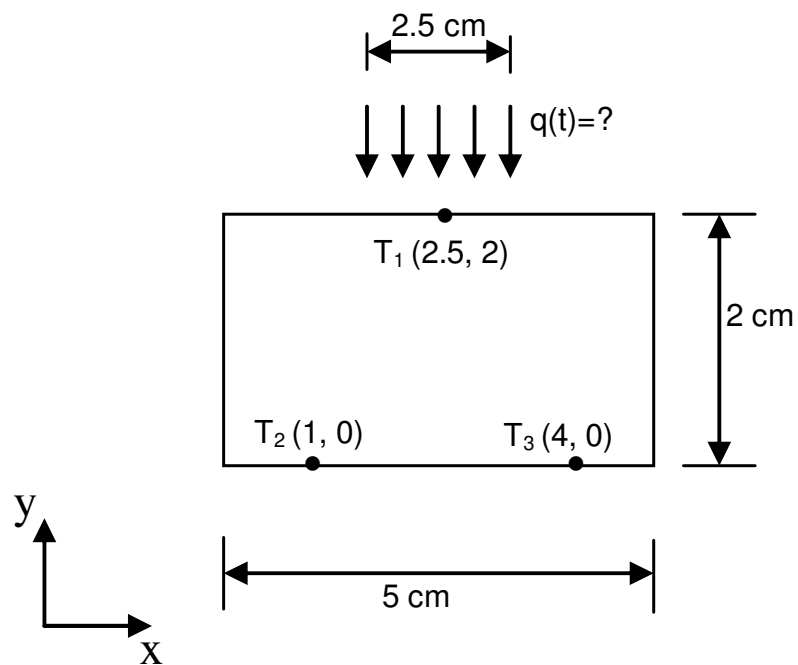
- Fluxos estimados a partir de dados de temperatura corrompidos por ruído de 3%.





# Resultados: estimativas caso 2D

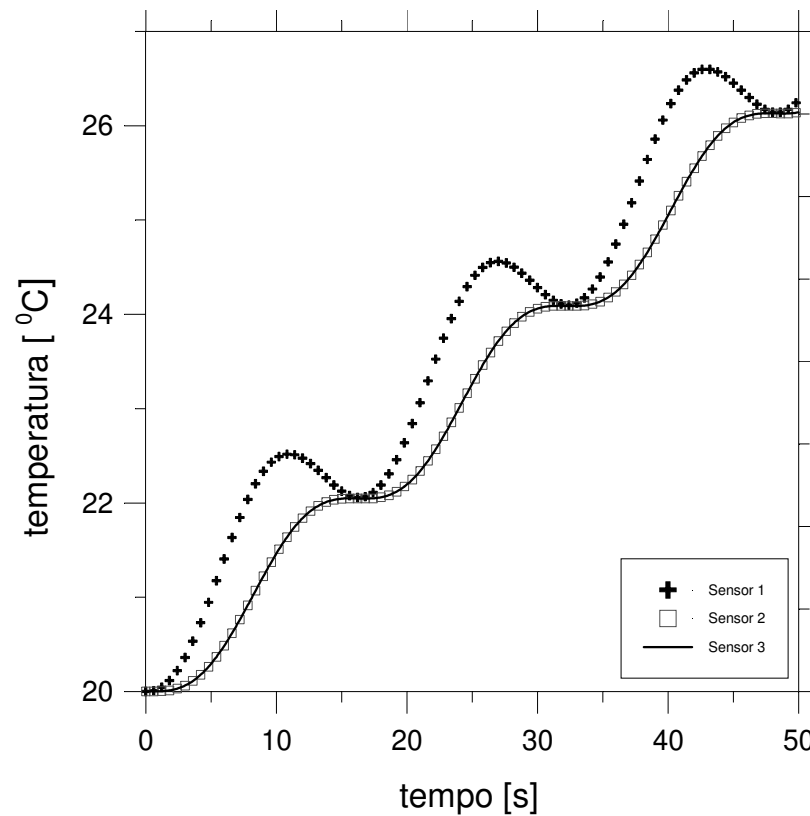
- Caso simulado.



$K=401\text{W/mK}$   
 $\alpha= 117 \cdot 10^{-06}\text{m}^2/\text{s}$

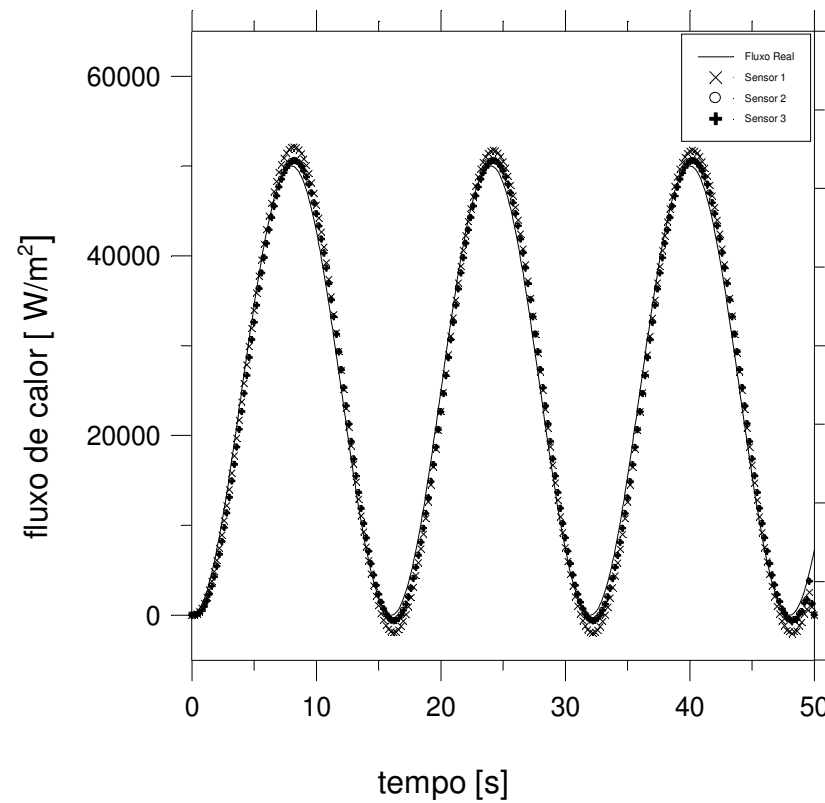
# Resultados: estimativas caso 2D

- Temperaturas simuladas sem erro, fluxo senoidal (Inv3D).



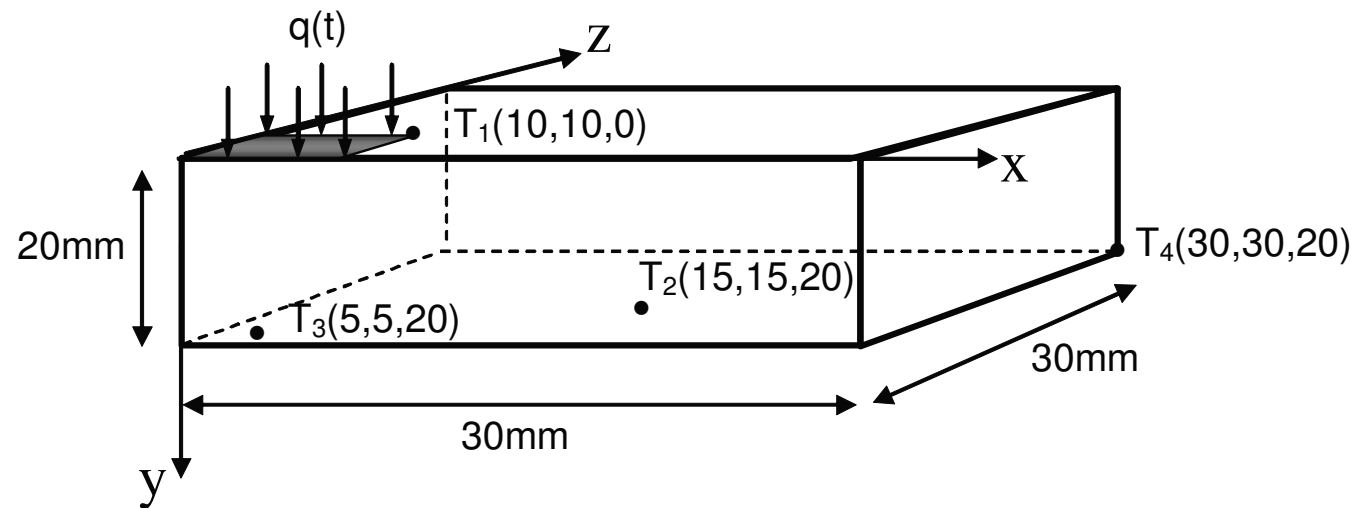
# Resultados: estimativas caso 2D

- Estimativas.



# Resultados: estimativas caso 3D

- Amostra simulada.

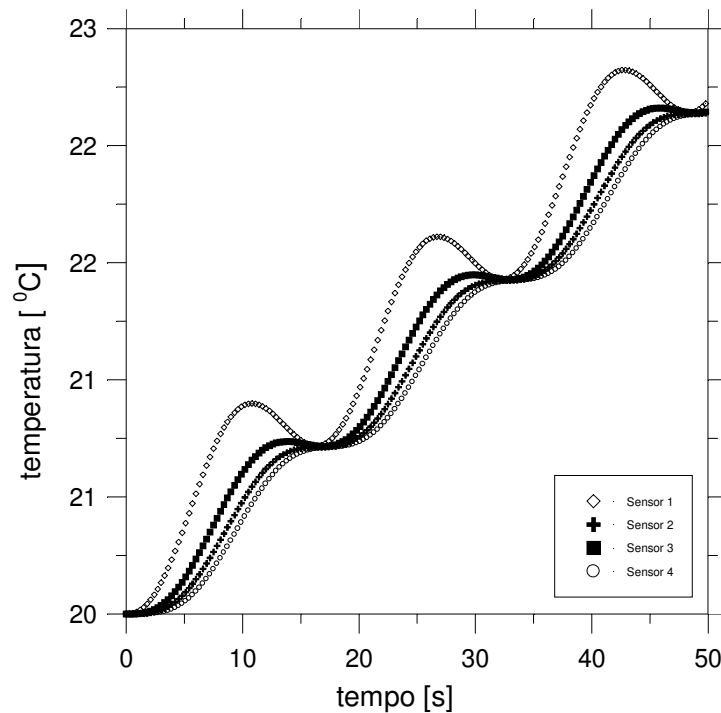


$K=401\text{W/mK}$   
 $\alpha= 117 \cdot 10^{-06}\text{m}^2/\text{s}$

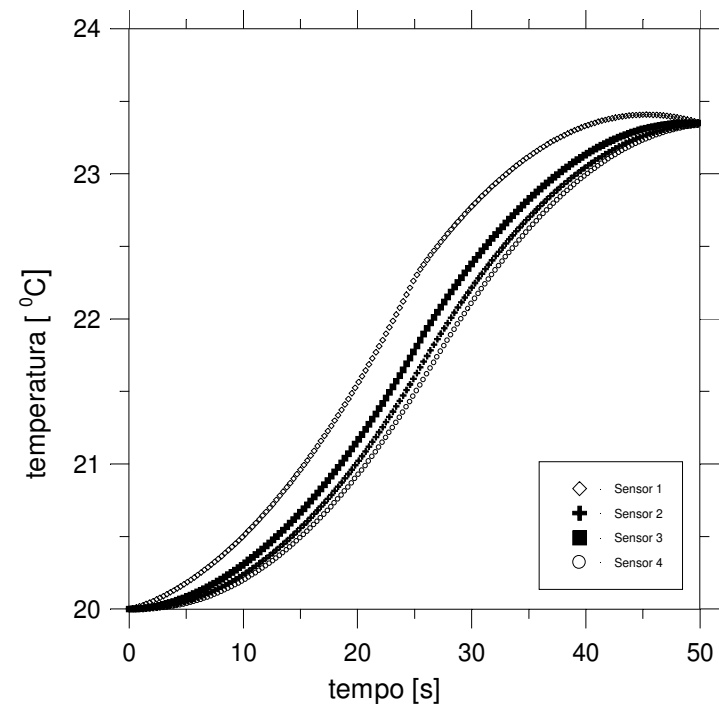
# Resultados: estimativas caso 3D

- Temperaturas simuladas sem erro (Inv3D).

- Fluxo senoidal

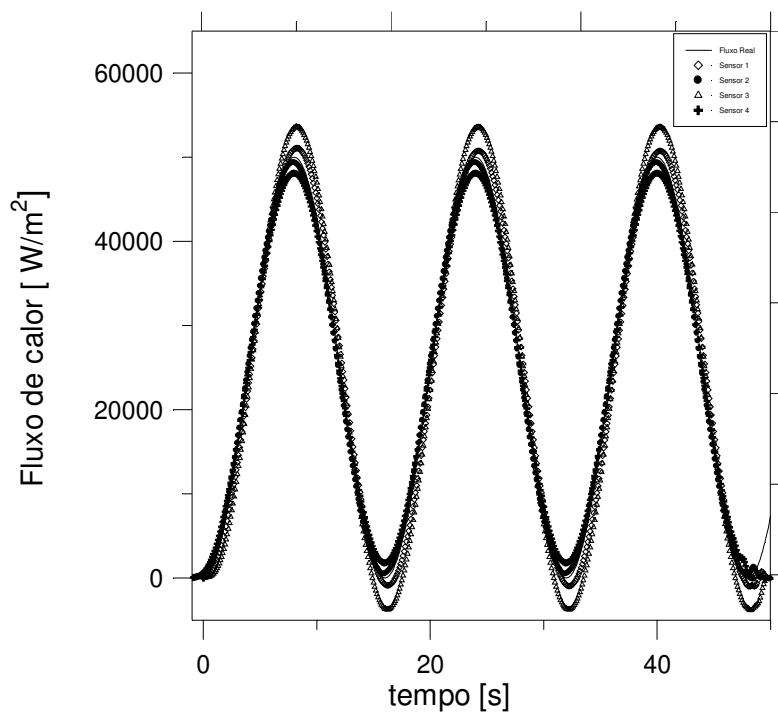


- Fluxo triangular

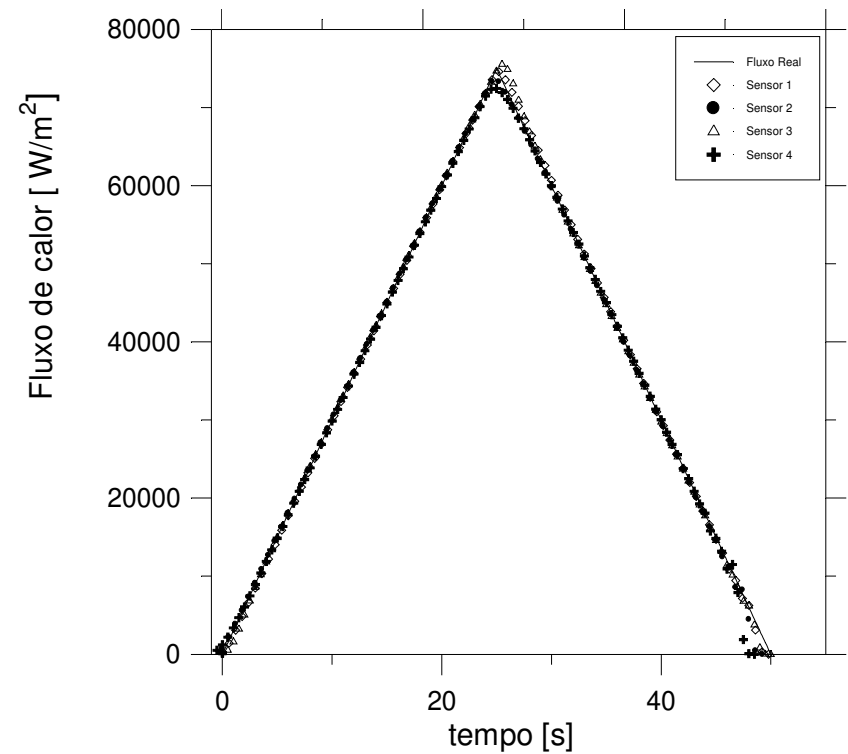


# Resultados: estimativas caso 3D

- Estimativas.
  - Fluxo senoidal



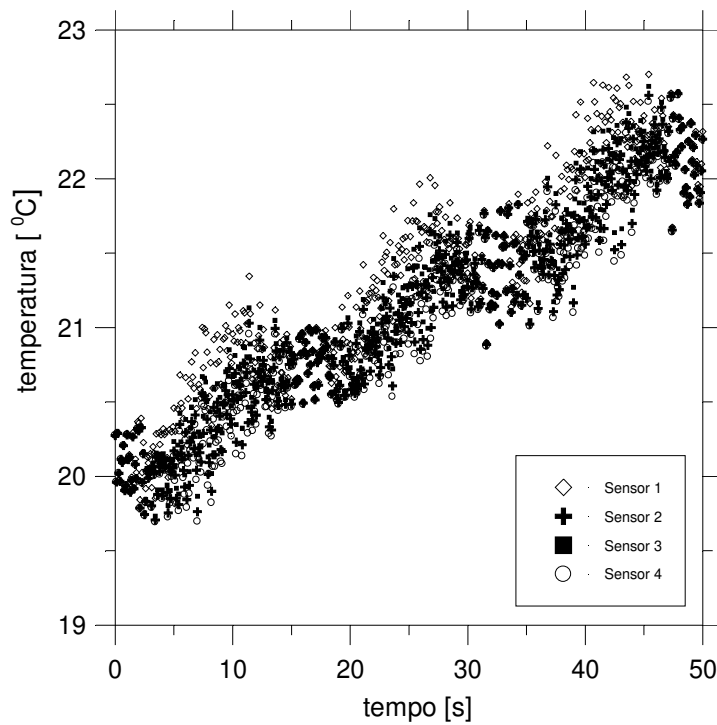
- Fluxo triangular



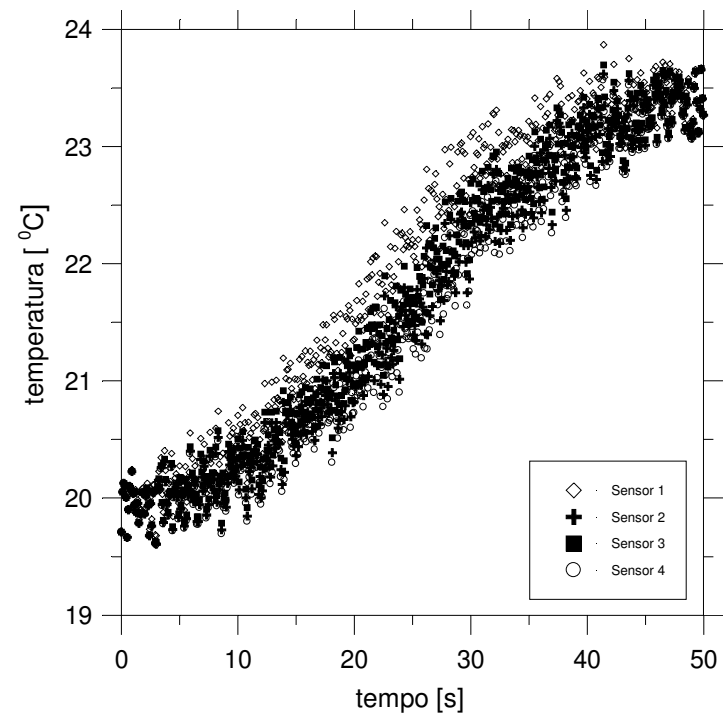
# Resultados: estimativas caso 3D

- Temperaturas corrompidas (Inv3D).

- Fluxo senoidal

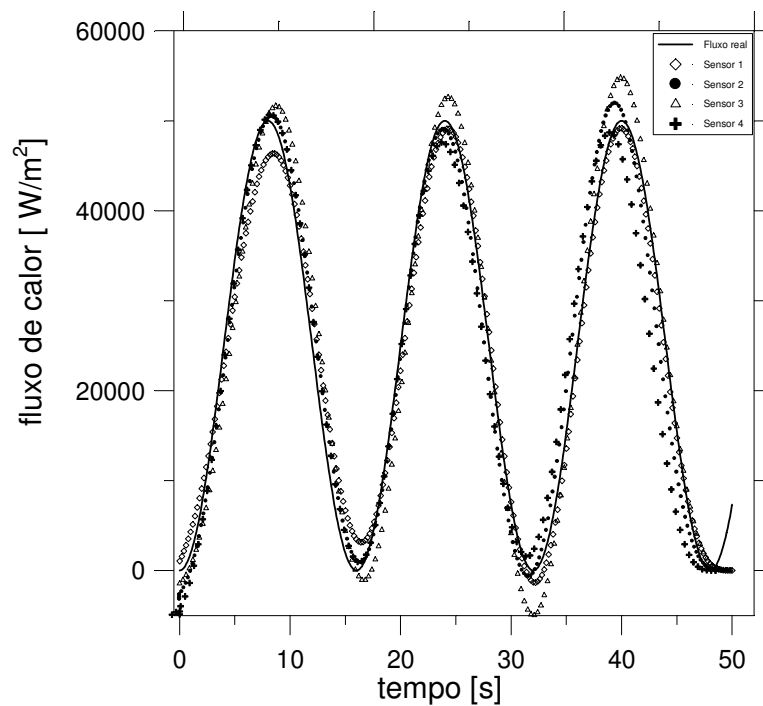


- Fluxo triangular

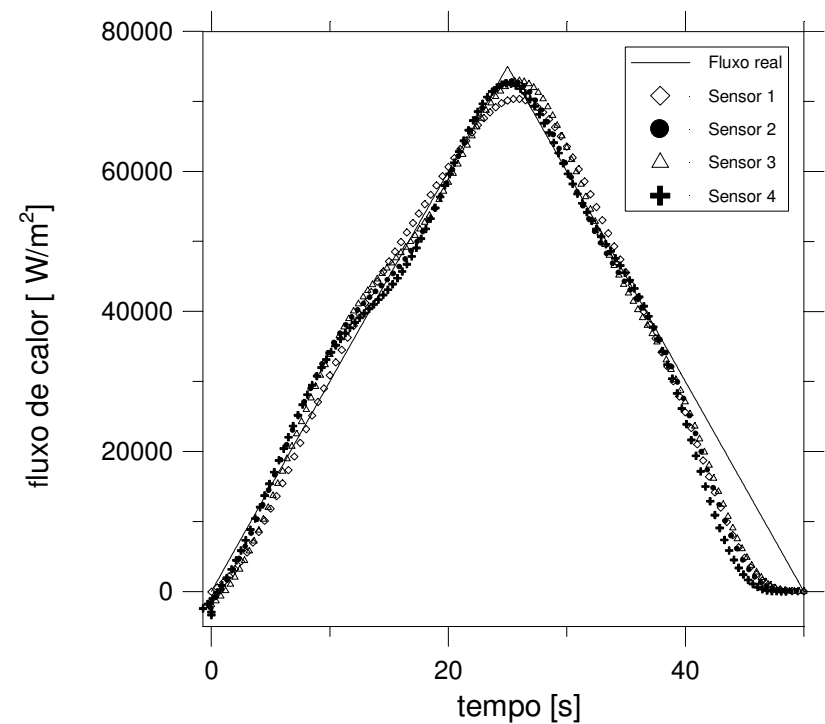


# Resultados: estimativas caso 3D

- Estimativas.
  - Fluxo senoidal



- Fluxo triangular



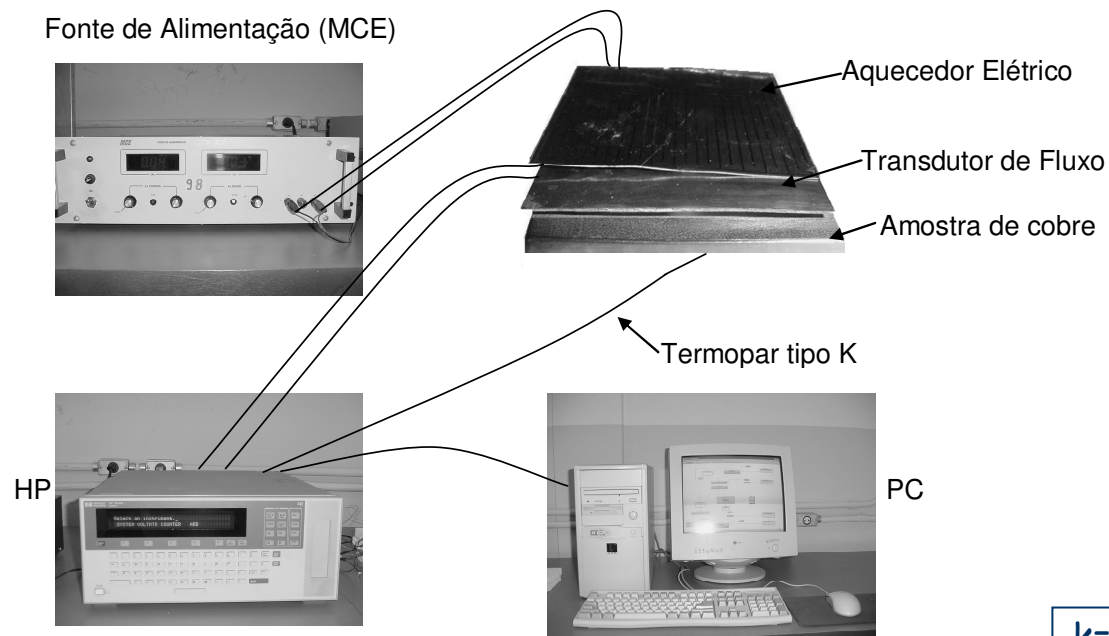




# Resultados Experimentais

# Resultados Experimentais: experimento1D

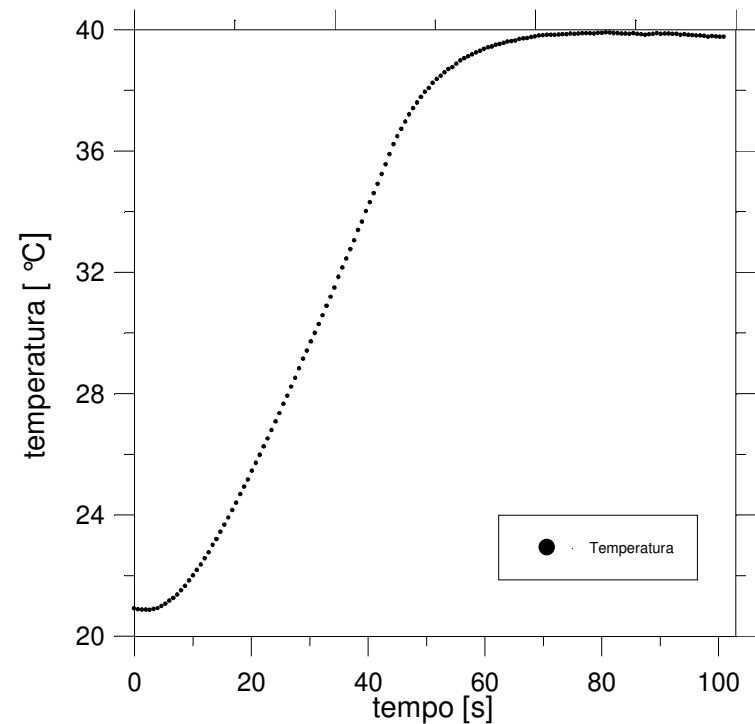
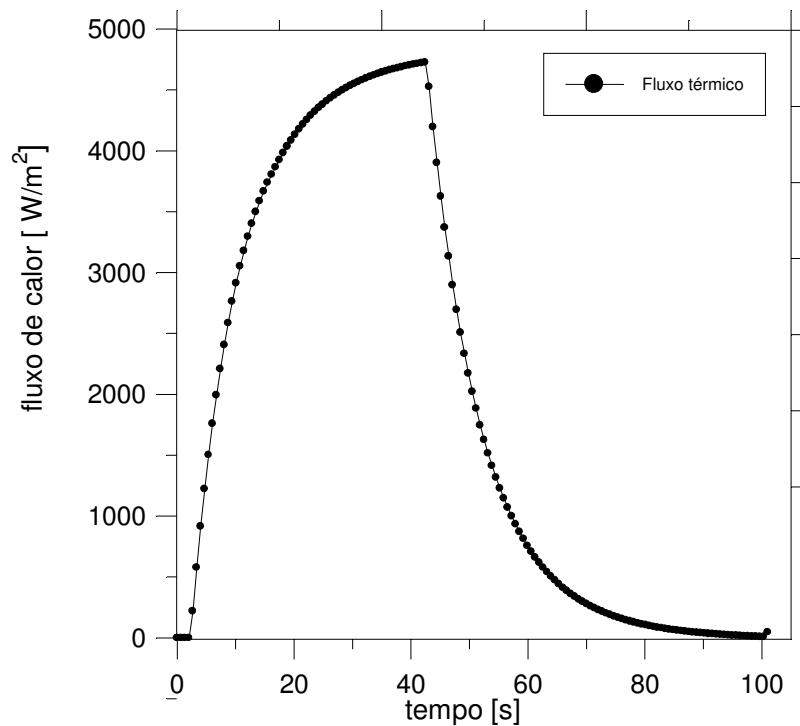
- Bancada experimental:



$k=401\text{W/mK}$   
 $\alpha= 117 \cdot 10^{-06}\text{m}^2/\text{s}$   
 $T_0=20.9^\circ\text{C}$

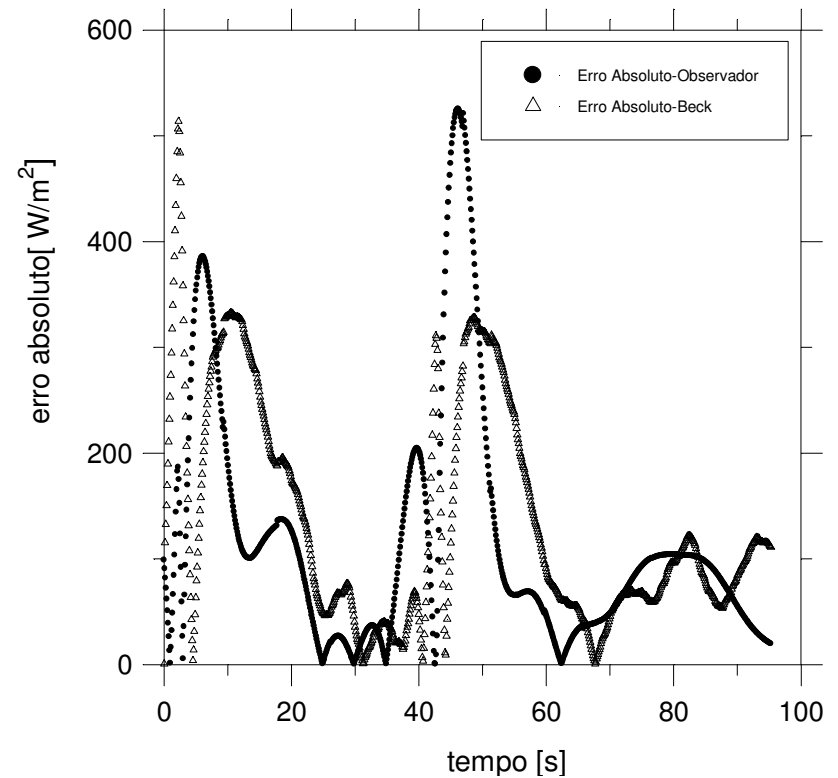
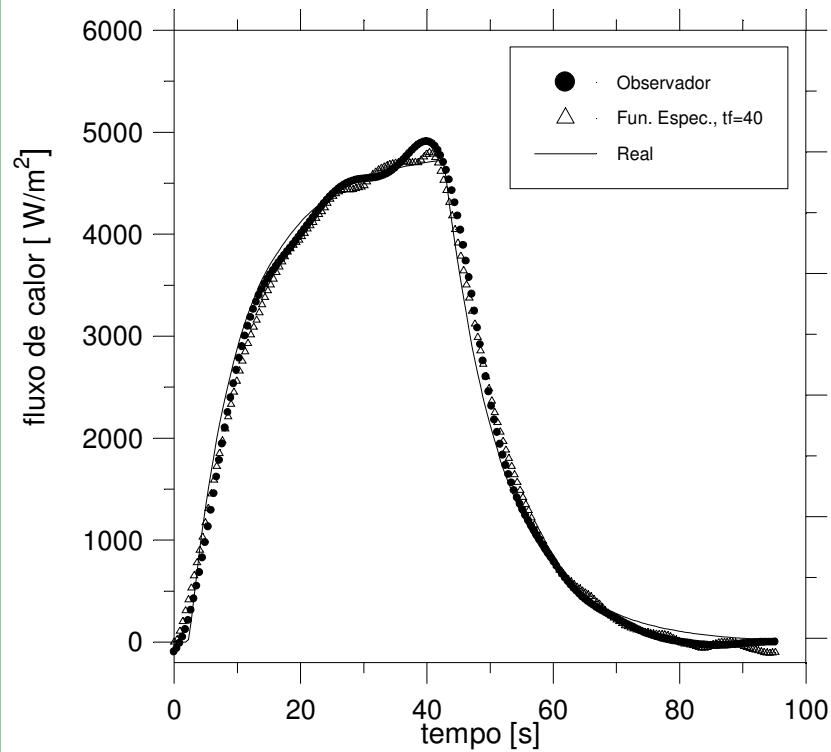
# Resultados Experimentais: experimento1D

- Fluxo térmico medido e evolução da temperatura:



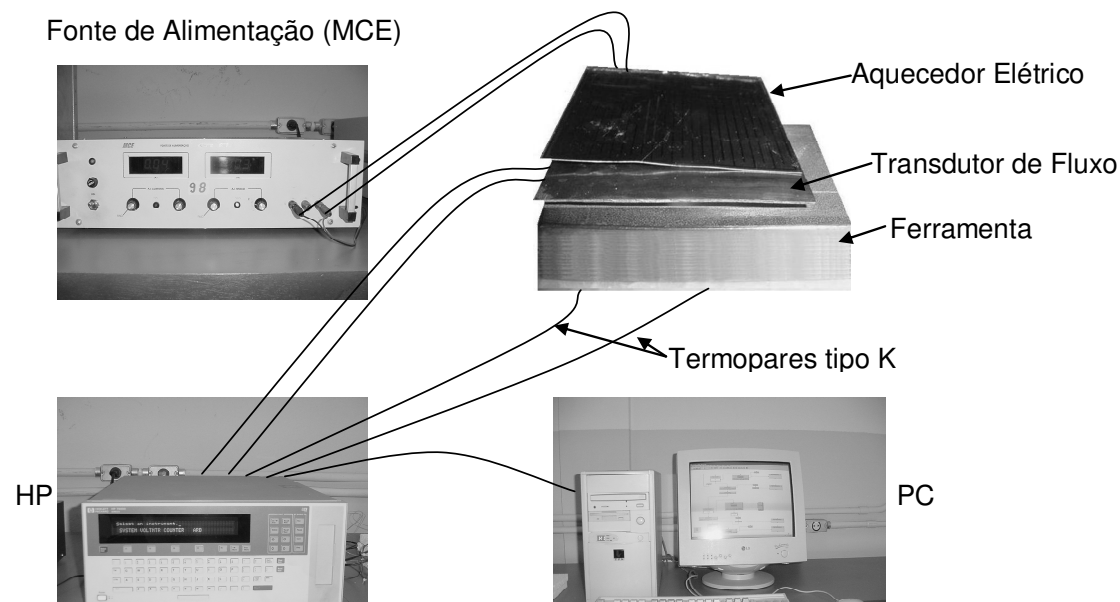
# Resultados Experimentais: experimento1D

- Estimativas e erro absoluto:



# Resultados Experimentais: experimento3D

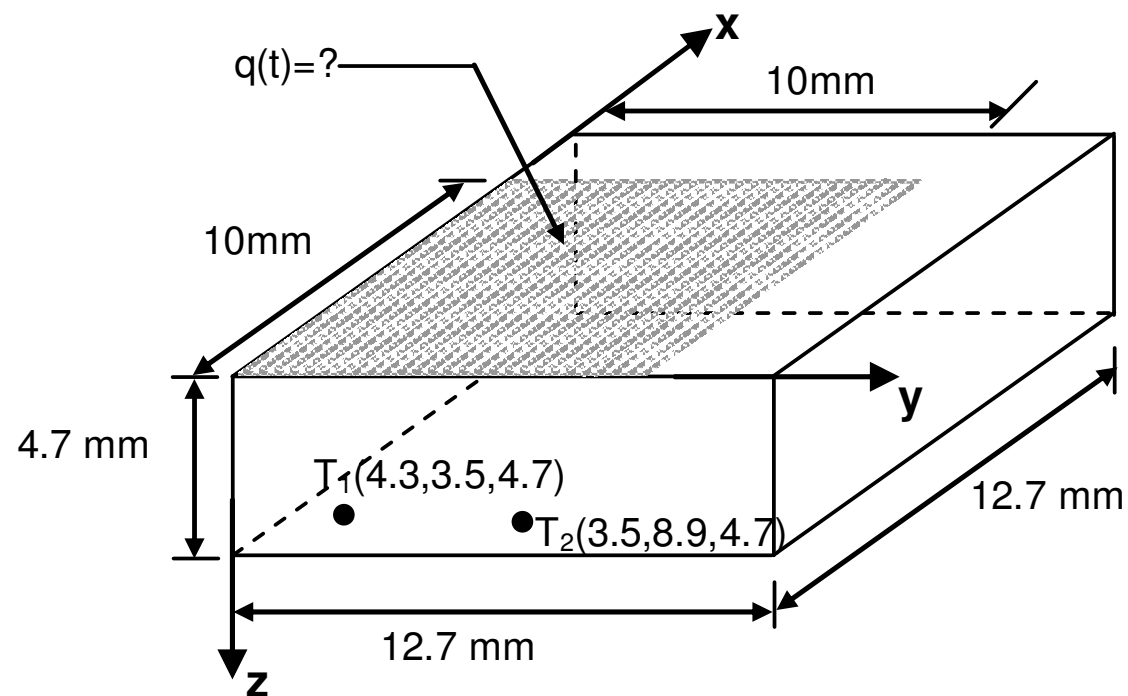
- Bancada experimental:



$k=43.1 \text{ W/mK}$   
 $\alpha= 14.8 \times 10^{-06} \text{ m}^2/\text{s}$   
 $T_0=29.2(^{\circ}\text{C})$

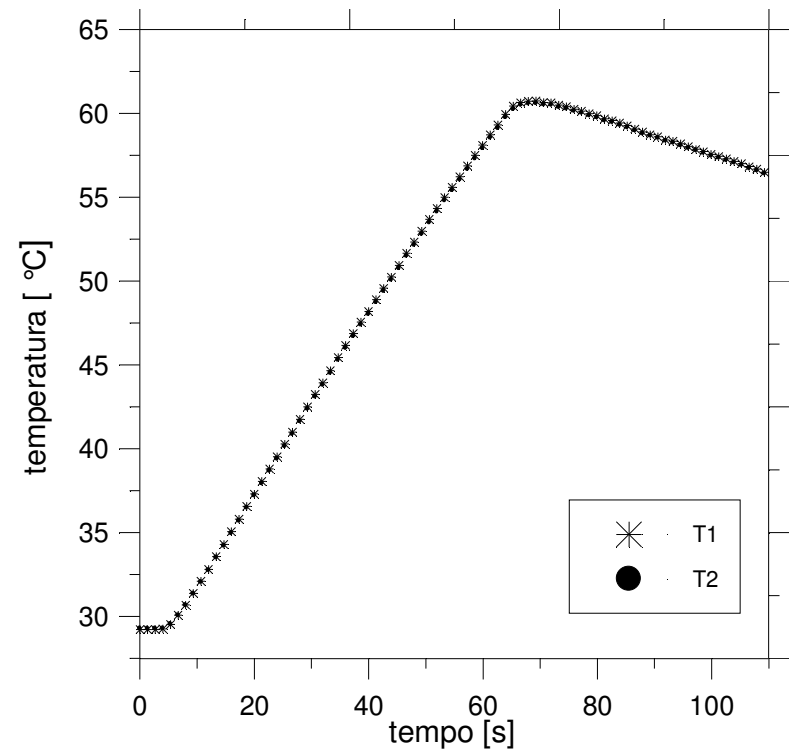
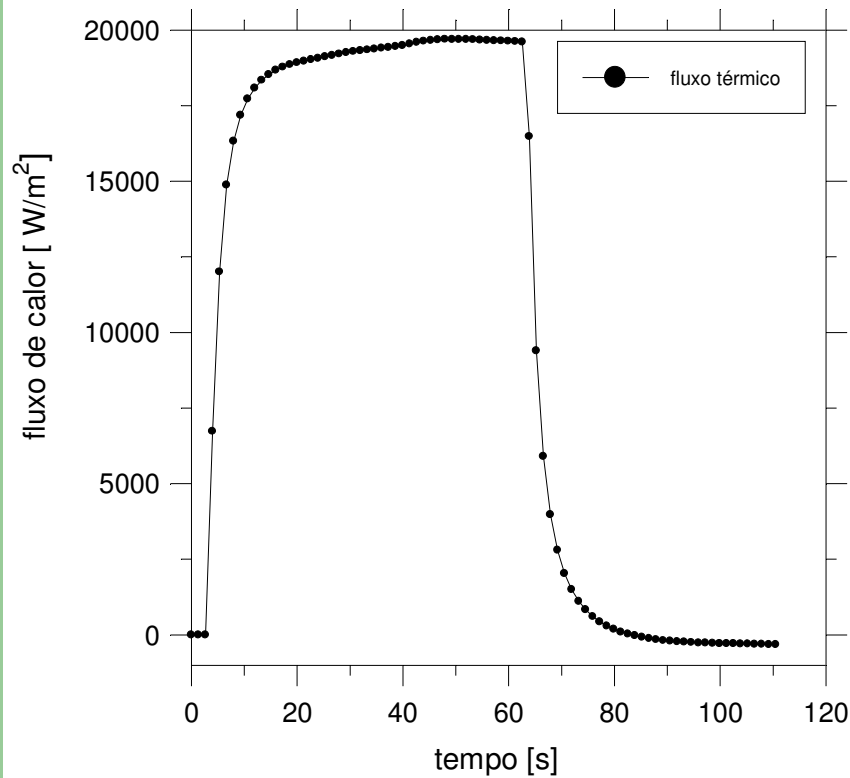
# Resultados Experimentais: experimento3D

- Dimensões da ferramenta e posicionamento dos termopares:



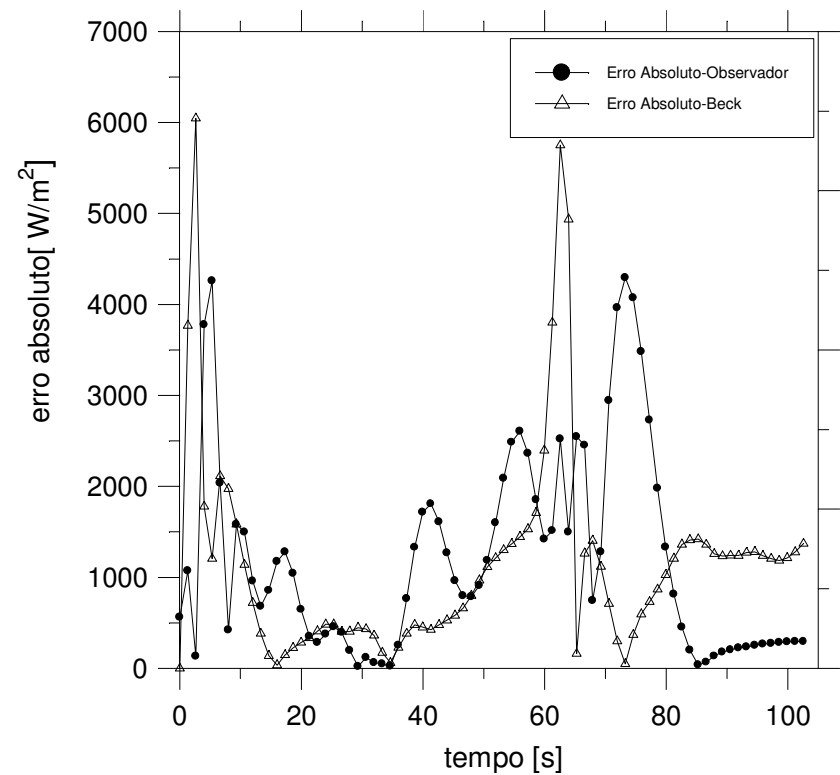
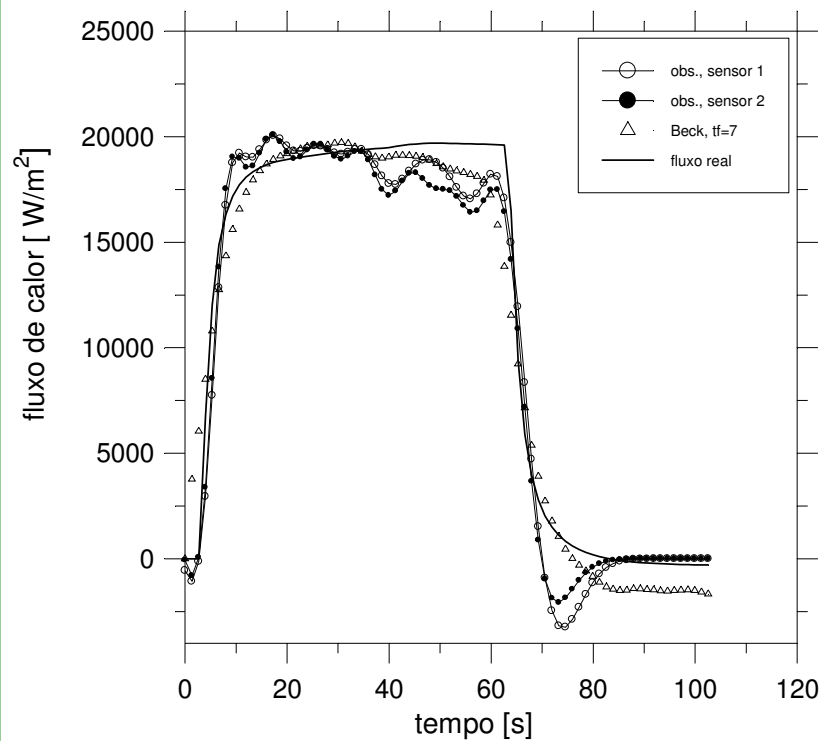
# Resultados Experimentais: experimento3D

- Fluxo térmico e temperaturas medidas:



# Resultados Experimentais: experimento3D

- Estimativas e erro absoluto:







Conclusões

# Conclusão

A técnica baseada em funções de Green e observadores dinâmicos busca:

- a flexibilização do método clássico baseado em observadores para aplicação imediata em problemas 2D e 3D.
- apresenta um baixo custo computacional
- robusta quanto à sensibilidade a ruídos presentes nas medições experimentais
- boas estimativas mesmo para dados com alto índice de incerteza
- simples implementação
- competitiva, se comparada às técnicas consagradas

# trabalhos futuros

- Extensão da técnica para solução de problemas com fluxo de calor transiente variando no tempo e espaço.
- Desenvolvimento de modelos que permitam o uso simultâneo de vários sensores.
- Aplicação da técnica em sistemas expostos a meios convectivos e/ou radiativos.
- Estudo de sistemas dinâmicos não lineares e conseqüente incorporação ao algoritmo dos observadores.
- Otimização no processo de obtenção dos parâmetros de ajuste.
- Extensão da técnica para estimativas de propriedades termo físicas.

# Fundamentos: solução do problema direto

- Software Inv3D;
- Diferenças Finitas;
- Método implícito;
- Solver SOR.

$$T_i = T_i - w^3 \left( \frac{aw^1 T_{i-1} + ae^1 T_{i+1} + b^2 - ap^1 T_i}{-ap^1} \right)$$

1- $ap$ ,  $ae$  e  $aw$  são coeficientes que dependem da malha e do passo de tempo

2- $b$  é o termo fonte que depende das condições de contorno

3-  $w$  é um fator de convergência definido pelo solver SOR.

